

Lehrbuch

der

elementaren Mathematik

von

Victor Schlegel,

Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

Zweiter Theil.

Geometrie.

Wolfenbüttel.

Druck und Verlag von Julius Zwissler.

1879.

Theil III (Trigonometrie) erscheint Michaelis.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Lehrbuch
der
elementaren Mathematik

von
Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

~~~~~  
**Zweiter Theil.**  
Geometrie.

---

**Wolfenbüttel.**  
Druck und Verlag von Julius Zwissler.  
1879.







## V o r r e d e.

Die für die Abfassung des gegenwärtigen Lehrbuches massgebenden Grundsätze, welche in der Vorrede zum ersten Theile desselben auseinandergesetzt wurden, haben, soweit mir bekannt geworden, die entschiedene Billigung der competenten Fachmänner gefunden. Ich kann mich daher an dieser Stelle auf specielle Bemerkungen zu dem vorliegenden zweiten Theile beschränken, umso mehr da gerade über die Gestaltung des in ihm enthaltenen Lehrstoffes mehreres zu sagen ist, weil hierüber die Ansichten weit auseinandergehen. Denn wie lebhaft und einstimmig auch von den Kennern der modernen Geometrie eine theilweise Verschmelzung ihrer Lehren mit denen der gewöhnlichen Schulgeometrie und eine Reform der letzteren gewünscht wird, es giebt noch, namentlich unter den älteren Lehrern der Mathematik, gar viele unbedingte Verfechter der unveränderten euclidischen Geometrie. Diese freilich werden das vorliegende Buch mit Kopfschütteln betrachten. Sie werden in ihm, wie in mehreren anderen neueren geometrischen Lehrbüchern, vergeblich die Eintheilung des Lehrstoffes in Lehrsätze, Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise suchen. Um zunächst bei dieser Aeusserlichkeit stehen zu bleiben, so bemerke ich, dass ich die in jener Eintheilung liegende Bequemlichkeit für Lehrer und Lernende nicht verkenne. Jeder Satz bildet mit dem zugehörigen Beweismaterial ein kleines in sich abgeschlossenes Ganze, welches leicht zu überblicken und im Gedächtnisse festzuhalten ist. Und in der That, für eine gedächtnissmässige Aneignung der geometrischen Wahrheiten wüsste ich keine bessere Form der Darstellung zu empfehlen, als die althergebrachte. Allein in neuerer Zeit legt man doch gerade mehr als früher Werth auf das Verständniss nicht nur der einzelnen Sätze, sondern ihres inneren Zusammenhanges, verlangt als Resultat des Unterrichtes nicht nur mathematisches Wissen, bestehend in einer Summe von Einzelkenntnissen, und mathematisches Können, bestehend in der Fähigkeit, eine Anzahl von Methoden auf mathematische Aufgaben anzuwenden, sondern mathematische Bildung, bestehend in klarer Erkenntniss des inneren Zusammenhanges und der Bedeutung der mathematischen Wahrheiten, in Uebersicht über das Ganze und Einsicht in die einzelnen Theile, eine Bildung, wie sie überhaupt das euclidische System nach seinen inneren und



## IV

äusseren Eigenthümlichkeiten nimmermehr gewähren kann.\*) — Von diesem Standpunkte aber findet man, dass das Zerreißen des Stoffes in lauter für sich bestehende Einzelartikel, in welchen jeder Beweis mit einem besonderen, neuen Ausgangspunkte einer Gedankenreihe anhebt, das Verständniss des Zusammenhanges erschwert. Ich meine nun, dass die Form der Darstellung eines modernen Lehrbuches diesem Zusammenhange in erster Linie Rechnung tragen muss. Daher gebe ich überall zuerst die Ableitung des Satzes aus früheren Sätzen, und spreche dann erst das Resultat in Form eines neuen Satzes aus. Ich denke, dass ernstlich nicht leicht Jemand daran Anstoss nehmen wird, auf diese Weise das Material, welches sonst zum Beweise eines Satzes dient, vor diesem Satze, statt hinter demselben zu finden, obwohl eine ähnliche Eigenthümlichkeit des ersten Theils, nämlich dass in einer arithmetischen Formel bald die rechte, bald die linke Seite als Aufgabe erscheint, thatsächlich das naive Erstaunen eines Recensenten hervorgerufen hat. — Will der Lehrer einen Satz mit seiner Ableitung in die althergebrachte Form bringen, oder durch die Schüler bringen lassen, so halte ich das für eine sehr nützliche dialectische Uebung; aber für die Form der Darstellung des Lehrbuches darf nach meiner Ansicht diese doch mehr nebensächliche Uebung heutzutage nicht mehr bestimmend sein.

Wie die äussere Form, so sind auch die Prinzipien der hergebrachten Darstellung ungenügend, den modernen Anforderungen zu entsprechen. Die alte Geometrie ist wesentlich eine Geometrie des Masses. Das der neueren Geometrie eigenthümliche, so äusserst fruchtbare Prinzip der Verwandtschaft spielt in der älteren eine durchaus untergeordnete Rolle. Zwar pflegen bei Betrachtung der Eigenschaften der Figuren auch in ihr die Verwandtschaften der Congruenz, Aehnlichkeit und Inhaltsgleichheit zur Eintheilung des Stoffes benutzt zu werden. Allein abgesehen davon, dass sie von den allgemeineren Verwandtschaften überhaupt keine Notiz nimmt, so ist die Verwandtschaft der Congruenz durch das Beweisprinzip des Aufeinanderlegens der Figuren ihres ursprünglichen Charakters als einer Lagenbeziehung vollständig entkleidet, um auf eine künstliche und gezwungene Weise aus Massbeziehungen abgeleitet zu werden, die naturgemässer Weise aus ihr fliessen sollen, anstatt zu ihrer Begründung zu dienen. Ganz ebenso verhält es sich mit der Aehnlichkeit, deren Eigenthümlichkeiten nur dann

---

\*) Wem diese Behauptung übertrieben erscheinen sollte, der möge beachten, was eine anerkannte Autorität, der verstorbene Prof. Hankel, über diesen Gegenstand sagt: „So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Principien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntniss des Zusammenhanges geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich verstellbaren Lage beruht.“ (Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869, S. 9.) — S. auch den Aufsatz von Fiedler: „Zur Reform des geometrischen Unterrichts“ (Züricher Vierteljahrsschrift XXII, 1, 1877). — Meine eigene Ansicht über diesen Gegenstand ist ausführlicher dargelegt in dem Aufsätze: „Ueber Ziele und Methoden der Schulgeometrie“. (Hoffmann's Ztschr. f. math. u. naturw. Unterr. Bd. 7, S. 179 ff.)



einfach und ungezwungen sich ergeben, wenn man die ähnlichen Gebilde zuerst in ähnlicher Lage betrachtet. — Wenn nun doch, was wohl allgemein anerkannt werden dürfte, das Prinzip der Verwandtschaft oberster Gesichtspunkt bleiben soll, so fragt es sich: Wie sind die einzelnen, von der euklidischen Geometrie ungenügend aufgefassten und behandelten Verwandtschaften zu begründen und durchzuführen? Vor allem die Congruenz, und die mit ihr zusammenhängende Betrachtung einzelner Gebilde. Lässt man sich nicht durch vorgefasste Meinungen, sondern durch die Natur dieser Verwandtschaft selbst leiten, vermöge deren ein bewegtes Gebilde (durch Drehung um einen endlich oder unendlich fernen Punkt) sich selbst congruent bleibt, so kommt man leicht zu dem Resultat, dass das Prinzip der Bewegung nothwendig ist zur Begründung dieser Verwandtschaft und hinreichend zur Ableitung der meisten aus ihr fließenden Resultate. Der Gedanke, dieses Prinzip zur Ableitung einzelner geometrischer Sätze zu verwenden, ist bekanntlich nicht neu. Auf ihm beruht u. A. der Thibaut'sche Beweis für das 11. Axiom des Euclid. In der Ausdehnungslehre Grassmann's ist seine Wichtigkeit verschiedentlich hervorgehoben. Angeregt durch das Studium dieses Werkes habe ich eine ausführliche und zusammenhängende Verwendung dieses Prinzipes an Stelle der Congruenzsätze zuerst im Jahre 1872 in meinem „System der Raumlehre. 1. Theil“ (Leipzig bei Teubner) gegeben. Bald darauf betrat J. C. V. Hoffmann in seiner „Vorschule der Geometrie“ denselben Weg. Man hat hie und da die pädagogische Brauchbarkeit dieses Prinzipes geringer gefunden als desjenigen des Aufeinanderlegens der Figuren. Die Sache steht aber so: Die ältere Methode erspart sich durch das Aufeinanderlegen der Dreiecke in den Beweisen der Congruenzsätze jede weitere Bewegung, und ist danach im Stande, alle Gebilde in starrer Lage zu betrachten. Diese Starrheit der Gebilde wird nun als Vorzug gepriesen, und dem Verfahren der Bewegung Mangel an Anschaulichkeit vorgeworfen. Wie aber, wenn die wesentlichen Eigenschaften eines Gebildes nur dadurch zur Anschauung kommen, dass man dasselbe als ein durch Bewegung entstandenes betrachtet? Woher rührt die noch heut in manchen Köpfen existirende Verwirrung hinsichtlich des Winkelbegriffs, wenn nicht davon, dass man den starren Winkel bald als Flächenstück, bald als Richtungsunterschied betrachtete? Hier, wie in vielen anderen Fällen, kann nur der Begriff der Bewegung Klarheit verschaffen. Der Vortheil, welchen die ältere Methode erreicht, ist also nur ein scheinbarer, er kommt der Bequemlichkeit zu Gute und schadet dem Verständniss. — Die Methode des Aufeinanderlegens der Dreiecke selbst aber entbehrt, indem sie an die Stelle der in jedem Momente bestimmten und zu verfolgenden continuirlichen Bewegung einen Sprung des Gebildes setzt, bei welchem nur Anfangs- und Endstellung bestimmt sind, und indem sie ferner der Phantasie zumuthet, sich zwei Gebilde an demselben Orte zu denken, selbst so sehr der Anschaulichkeit, dass die herkömmlichen Beweise der Congruenzsätze, mit denen obendrein das geometrische Anfangspensum belastet werden muss, zu den am schwierigsten zu begreifenden im Gebiete der ganzen Elementar-Geometrie



## VI

gehören. \*) Endlich involvirt die Anwendung der Congruenzsätze zum Beweisen anderer Sätze einen Umweg, dessen Beseitigung entschieden geboten erscheint. — In der ersten Abtheilung der vorliegenden Bearbeitung der reinen Geometrie ist nun der Versuch gemacht, unter Zuhilfenahme der die wesentlichen Eigenschaften der Ebene und des Raumes ausdrückenden Sätze die herkömmlich in das Gebiet der Congruenz fallenden Sätze abzuleiten, ohne auf die Congruenzsätze selbst zurückzugehen. Wenn gleichwohl an einer Stelle (Satz 133) dieser Abtheilung, sowie später einigemale hiervon eine Ausnahme gemacht wird, so hat dies folgenden Grund.

Zur einfachen und naturgemässen Ableitung aller ein einzelnes Gebilde betreffenden Sätze reicht auch das Prinzip der Bewegung noch nicht aus. Die darauf gegründete Methode findet vielmehr ihre wesentliche Ergänzung in den geometrischen Operationen, wie sie von Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre“ aufgestellt, und in meinem „System der Raumlehre“ Th. I, S. 12—18, 70—133 angewendet sind. Dass ich diesen so fruchtbaren und einzig adäquaten geometrischen Calkül im vorliegenden Lehrbuche ganz bei Seite gelassen habe (wodurch auch manche Beschränkung bei der Wahl des Stoffes nöthig wurde), erklärt sich aus der gegenwärtigen Verfassung und Eintheilung des geometrischen Unterrichtes an den höheren Schulen, für welche dieses Buch doch wesentlich mit bestimmt ist. Es müssen noch manche Schranken fallen, manche Vorurtheile schwinden, ehe man diesen Calkül, welcher zusammen mit der Methode der Bewegung die einzig mögliche endgiltige Lösung der Aufgabe, die Elementargeometrie angemessen darzustellen, enthält, in ein Schulbuch wird aufnehmen können. Wer übrigens die Darstellung des vorliegenden Buches mit derjenigen des „Systems der Raumlehre“ vergleicht, wird finden, dass die erstere nur an einer Reihe von Stellen der Ergänzung durch jenen Calkül bedarf, um mit der letzteren in Uebereinstimmung gebracht zu werden. Ueber eine spätere Erweiterung des Buches in diesem Sinne die Ansichten der Fachgenossen zu hören, wird mir erwünscht sein. Immerhin ist es schon bei der gegenwärtigen Arbeit mein Bestreben gewesen, wenigstens den Geist derjenigen Darstellung der Geometrie, welche mir als Ideal vorschwebt, einigermaßen zur Anschauung zu bringen, wenn ich auch aus dem oben angeführten Grunde auf die nach meiner Ansicht allein angemessene Form mehrfach verzichten musste.

Von den übrigen Verwandtschaften habe ich nur die Aehnlichkeit und die Collineation ausführlicher behandelt. Die letztere erscheint als natürliche Erweiterung der ersteren, und ihre Darstellung wird auf diese Weise hoffentlich der

---

\*) Ich habe übrigens hier, wie in anderen Fällen, wo meine Darstellung eine von der gewöhnlichen wesentlich abweichende ist, den Anhängern der älteren Methode durch Aufnahme der (auch historisch immerhin interessanten) früheren Beweismethoden in die Anmerkungen eine mir billig scheinende Concession gemacht. Ausserdem sind die dem gewöhnlichen Pensum nicht angehörenden Gegenstände und solche, die meistens erst an späterer Stelle behandelt werden, durch Hinzufügung eines Sternes zur Nummer des Abschnittes hervorgehoben.



Anforderung des organischen Zusammenhanges mit dem Vorangehenden entsprechen. (Weit besser, als hier geschehen, lässt sich auch diese Verwandtschaft mit Hilfe des oben erwähnten geometrischen Calküls behandeln. Vgl. „System der Raumlehre“, Th. II, S. 59—104.) Die übrigen speciellen Arten der Collocation finde ich nicht anschaulich und wichtig genug, um sie ausführlicher zu behandeln.

Nun noch ein Wort über die Kegelschnitte. Als Resultate einer zusammengesetzten Bewegung und Linien, die sich nicht mit Lineal und Cirkel construiren lassen, gehören sie eigentlich nicht in den Kreis der Elemente. Aber ihrer physikalischen Anwendungen wegen, und namentlich, weil sich ihre wesentlichen Eigenschaften einzig und allein mit Hilfe der elementaren Geometrie ableiten lassen, verdienen sie eine Stelle im Anhang des Buches und im Pensum der obersten Klasse. — Ueber die Art ihrer Behandlung sollte nach meiner Ansicht keine Uneinigkeit bestehen. Die analytische Geometrie ist, wenn man nicht in den ersten Anfängen stecken bleiben will, untrennbar von der Differentialrechnung. Vor allem aber ist sie viel zu schwerfällig, in ihrer ursprünglichen Gestalt antiquirt, und mit ihrem Hilfsapparat der Coordinaten dem an rein geometrische Betrachtungen Gewöhnten fremdartig. Ich möchte sie daher weder dem Gymnasium noch der Realschule empfehlen. Es bleibt also der rein geometrische Weg. Dieser nun wird ungemein erleichtert durch die gleichzeitige Betrachtung der Curve und eines festen Kreises, welchen ich den Leitkreis genannt habe. Die hierauf beruhende Darstellung findet sich bereits in meinem „System der Raumlehre“, Th. II, S. 27 ff., wo ich sie zur Vervollständigung des Ganzen gegeben habe, obwohl sie mit den Grassmann'schen Methoden ihrem Wesen nach nichts gemein hat.

Ich schliesse diese Erörterungen mit dem Wunsche, dass das vorliegende Buch dazu beitragen möge, die noch schwebende Frage nach einer den Bedürfnissen der Gegenwart entsprechenden Darstellung der elementaren Geometrie ihrer Entscheidung näher zu führen.

Waren im April 1879.

V. Schlegel.



# Inhalt des zweiten Theils.

## Einleitung (1—14).

|                                                                          | Seite |
|--------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. Ableitung der geometrischen Grundgebilde (1—4)                        | 1     |
| a. Ableitung aus der Erfahrung mittelst des Begriffs der Grenze (1. 2) . | 1     |
| 1. Der Körper. — 2. Gebilde als Grenzen am Körper.                       |       |
| b. Ableitung durch Ueberlegung mittelst des Begriffs der Bewegung (3. 4) | 3     |
| 3. Der Punkt. — 4. Gebilde als Resultate der Bewegung des Punktes.       |       |
| 2. Eigenschaften der geometr. Grundgebilde (5—11)                        | 5     |
| 5. Ausdehnung. — 6. Grösse — 7. Zusammensetzung und Theilung. —          |       |
| 8. Einfache und zusammengesetzte Bewegung. — 9. Gestalt. — 10. Be-       |       |
| grenzte und unbegrenzte Bewegung. — 11. Endliche und unendliche          |       |
| Bewegung.                                                                |       |
| 3. Die geometr. Gebiete und ihre Eigenschaften (12—14)                   | 9     |
| 12. Eintheilung der Gebiete — 13. Merkmale der einfachen Gebiete. —      |       |
| 14. Eintheilung der Raumwissenschaft.                                    |       |

## Reine Geometrie.

### Erste Abtheilung: Geometrie der bewegten Gebilde (15—106).

#### I. Geometrie der Geraden (15—25).

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| Der Punkt und seine Bewegung auf der Geraden (15—25)                | 12 |
| $\alpha$ ) Einmalige Bewegung des Punktes (15. 16) . . . .          | 12 |
| 15. Bestimmung des Punktes. — 16. Bestimmung der Geraden.           |    |
| $\beta$ ) Mehrmalige Bewegung des Punktes (17—25) . . . .           | 13 |
| Die Strecke und ihre Bewegung auf der Geraden (17—25)               | 13 |
| 1) Die geometrischen Operationen mit Strecken (17—20)               | 13 |
| 17. Addition. — 18. Subtraction. — 19.* Multiplication. Theilung. — |    |
| 20.* Messung.                                                       |    |
| 2) Entgegengesetzte Richtungen einer Geraden (21—23)                | 15 |
| 21. Entgegengesetzte Richtungen. — 22.* Positive und negative       |    |
| Strecken. — 23.* Erweiterung.                                       |    |
| 3) Bewegung der Strecke auf der Geraden (24. 25) .                  | 17 |
| 24.* Bewegung der Strecke. — 25.* Erweiterung.                      |    |



**II. Geometrie der Ebene (26—106).**

|                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| a. Die Gerade und ihre Bewegungen in der Ebene (26—78)                                                                                                                                                                                       | 19 |
| $\alpha$ ) Einmalige Bewegung der Geraden (26—35) . . . .                                                                                                                                                                                    | 19 |
| 26. Bestimmung der Geraden.                                                                                                                                                                                                                  |    |
| 1) Lagenänderung der Geraden (27. 28) . . . .                                                                                                                                                                                                | 19 |
| 27. Bewegung der Geraden. — 28.* Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.                                                                                                                                                           |    |
| 2) Richtungsänderung d. Geraden. — Der Winkel (29-35)                                                                                                                                                                                        | 22 |
| 29. Drehung. — 30. Beziehungen zwischen zwei Geraden.                                                                                                                                                                                        |    |
| <b>Der Winkel.</b>                                                                                                                                                                                                                           |    |
| 31. Vorbemerkung. — 32. Definition des Winkels. — 33. Eintheilung der Winkel nach ihrer Grösse. — 34.* Darstellung der Drehung durch Multiplication. — 35. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.                                 |    |
| $\beta$ ) Zweimalige Bewegung der Geraden (36—76) . . . .                                                                                                                                                                                    | 29 |
| 36. Uebersicht.                                                                                                                                                                                                                              |    |
| a <sub>1</sub> . Der Winkel und seine Bewegung in der Ebene (37—51)                                                                                                                                                                          | 30 |
| 1) Die geometr. Operationen mit Winkeln (37—40) .                                                                                                                                                                                            | 30 |
| 37. Addition. — 38. Subtraction. — 39.* Multiplication. Theilung. — 40.* Messung.                                                                                                                                                            |    |
| 2) Entgegengesetzte Seiten einer Ebene (41—44) .                                                                                                                                                                                             | 32 |
| 41. Vorbemerkung. — 42. Entgegengesetzte Drehungen. — 43.* Positive und negative Winkel. — 44.* Erweiterung.                                                                                                                                 |    |
| 3) Bewegung des Winkels in der Ebene (45. 46) .                                                                                                                                                                                              | 35 |
| 45. Vorbemerkung. — 46.* Bewegung des Winkels.                                                                                                                                                                                               |    |
| 4) Nebenwinkel und Scheitelwinkel (47—51) . . . .                                                                                                                                                                                            | 36 |
| 47. Vorbemerkung. — 48. Nebenwinkel. — 49. Beziehung zwischen zwei Nebenwinkeln. — 50. Scheitelwinkel. — 51. Beziehung zwischen zwei Scheitelwinkeln.                                                                                        |    |
| b <sub>1</sub> . Zwei von einer dritten Geraden geschnittene Parallelen (52—58) . . . . .                                                                                                                                                    | 39 |
| 52. Vorbemerkung. — 53. Erklärungen. — 54. Lagenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen. — 55. Grössenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen. — 56. Specieller Fall. — 57. Erweiterung. — 58.* Der unendlich ferne Punkt einer Geraden. |    |
| c <sub>1</sub> . Drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden. — Das Dreieck (59—76) . . . . .                                                                                                                                           | 44 |
| 59. Vorbemerkungen.                                                                                                                                                                                                                          |    |
| 1) Sinn des Dreiecks (60) . . . . .                                                                                                                                                                                                          | 45 |
| 60.* Entgegengesetzte Seiten des Dreiecks.                                                                                                                                                                                                   |    |
| 2) Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks (61—64) . . . . .                                                                                                                                                                         | 46 |
| 61 Innere Winkel — 62. Aussenwinkel. — 63. Erweiterungen. — 64. Fortsetzung.                                                                                                                                                                 |    |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 3) Bestimmung des Dreiecks durch seine Stücke (65—68)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Seite<br>49 |
| 65. Vorbemerkung. — 66. Bestimmung durch 1, 2, 3 Stücke. — 67. Die einzelnen Fälle der Bestimmung eines Dreiecks durch drei Stücke. — 68.* Erweiterung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |             |
| 4) Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks (69—76)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 55          |
| 69. Das gleichschenklige Dreieck. — 70. Zwei gleichschenklige Dreiecke. — 71. Das ungleichseitige Dreieck. — 72. Fortsetzung. — 73. Erweiterungen. — 74. Entfernung. — 75. Zwei ungleichseitige Dreiecke. — 76.* Rückblick.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |             |
| γ) Dreimalige Bewegung der Geraden (77. 78)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 65          |
| 77.* Uebersicht. — 78. Das Viereck.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |             |
| b. Die Strecke und ihre Bewegungen in der Ebene (79—106)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 67          |
| 1) Lagenänderung der Strecke. — Das Parallelogramm (79—87)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 67          |
| α) Einmalige Bewegung der Strecke (79. 80)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 67          |
| 79. Das Parallelogramm. — 80. Eigenschaften der Diagonalen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |             |
| β) Mehrmalige Bewegung der Strecke (81—87)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 70          |
| 1. Die geometrischen Operationen mit Parallelogrammen (81—84)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 70          |
| 81.* Addition. — 82.* Subtraction. — 83.* Multiplication. Theilung. — 84.* Messung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |             |
| 2. Entgegengesetzte Seiten eines Parallelogramms (85—87)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 74          |
| 85.* Entgegengesetzte Seiten. — 86 * Positive und negative Parallelogramme. — 87.* Erweiterungen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |             |
| 2) Richtungsänderung der Strecke. — Die Kreisfläche (88—106)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 76          |
| 88. Die Kreisfläche. — 89. Kreis und Punkt. — 90. Kreis und Gerade. α) Secanten. — 91. Peripheriewinkel — 92. β) Tangenten. — 93.* Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt. — 94.* Drehung einer Strecke um einen ausserhalb liegenden Punkt. — 95. Construction eines Kreises aus gegebenen Bedingungen. Vorbemerkung. — 96. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises — 97 Sätze von drei Linien, die durch denselben Punkt gehen. — 98. Kreis und Figur — 99. Dreieck. — 100. Viereck. — 101. Regelmässiges Vieleck. — 102.* Fortsetzung. — 103.* Fortsetzung. — 104. Zwei Kreislinien. — 105. Rückblick. — 106. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises. |             |

## Zweite Abtheilung.

|                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Geometrie der ruhenden Gebilde (107—140)                                                                                               | 100 |
| 107.* Vorbemerkung.                                                                                                                    |     |
| I. Die Aehnlichkeit (108—126)                                                                                                          | 103 |
| 1) Dreiecke (108—116)                                                                                                                  | 103 |
| a. Aehnlichkeit bei perspectivischer Lage (108—113)                                                                                    | 103 |
| 108. Definition ähnlicher Dreiecke. — 109. Eigenschaften ähnlicher Dreiecke. — 110. Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks durch Winkel |     |



und Seitenverhältnisse. — 111. Vierte Proportionale. — 112. Harmonische Punktpaare. — 113. Specieller Fall.

b. Aehnlichkeit bei verkehrt-perspectivischer Lage (114—116)

114. Verkehrt-perspectivische Lage. — 115. Specielle Fälle. — 116.\* Erweiterung.

2) Polygone (117—122) . . . . . 115

117. Aehnliche Polygone. — 118. Eigenschaften ähnlicher Polygone. — 119. Erweiterung. — 120.\* Bestimmung der Gestalt eines Polygons durch Winkel und Seitenverhältnisse. — 121.\* Homologe Punkte und Geraden. — 122.\* Erweiterung.

3) Kreise (123—126) . . . . . 120

123. Zwei Kreise. — 124. Eine gemeinsame Secante. — 125.\* Zwei gemeinsame Secanten. — 126.\* Drei Kreise.

II. Die Collineation (127—140) . . . . . 124

1) Das vollständige Viereck (127—134) . . . . . 124

127.\* Vorbemerkung. — 128.\* Das Doppelverhältniss. — 129.\* Das Tripelverhältniss. — 130.\* Das Quadrupelverhältniss. — 131.\* Collineare Punktreihen. — 132.\* Collineare Strahlenbüschel. — 133.\* Involutorische Punktreihen. — 134.\* Involutorische Strahlenbüschel.

2) Das Brianchon'sche Sechseck und das Pascal'sche Sechseck (135. 136) . . . . . 135

135.\* Vorbemerkung. — 136.\* Eigenschaften beider Figuren.

3) Die Kreislinie. — Pol und Polare (137—139). . . 137

137.\* Eine Kreislinie. — 138.\* Mehrere Kreislinien. — 139.\* Aehnlichkeitspolaren.

4) Die Projection als specieller Fall d. Collineation (140) 142

140.\* Die Projection.

## Rechnende Geometrie.

141. Vorbemerkung.

1) Der Flächenraum als Streckenproduct (142—147) 144

142. Masseinheit. — 143. Das Rechteck. — 144. Das Parallelogramm. — 145. Das Dreieck. — 146. Das Trapez. — 147. Polygone.

2) Vergleichung der Flächenräume mehrerer Figuren (148. 149) . . . . . 147

148. Quotient von Flächenräumen. — 149. Summe von Flächenräumen.

3) Construction der Wurzeln einer Gleichung (150—153) 151

150. Vorbemerkung. — 151. Die Gleichung vom ersten Grade. — 152. Die rein quadratische Gleichung. — 153. Die gemischt quadratische Gleichung.

4) Das regelmässige Polygon und der Kreis (154—164) 154

a. Allgemeine Polygone (154. 155) . . . . . 154

154. Das einbeschriebene  $n$ -Eck und  $2n$ -Eck. — 155. Das einbeschriebene und umbeschriebene  $n$ -Eck.



## XII

|                                                                                                                                                                                 |              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| b. Specielle Polygone (156—161) . . . . .                                                                                                                                       | Seite<br>155 |
| 156. Das Sechseck. — 157. Das Viereck. — 158. Das Zehneck. —<br>159. Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitt. — 160. Das Fünf-<br>zehneck. — 161. Abgeleitete Polygone. |              |

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| c. Der Kreis (162—164) . . . . .                                                    | 157 |
| 162. Die Zahl $\pi$ . — 163. Umfang des Kreises. — 164. Flächenraum<br>des Kreises. |     |

### Anhang: Die Curven zweiter Ordnung.

165. Vorbemerkung. — 166. Allgemeines Bewegungsgesetz der Curven zweiter Ordnung.

|                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1) Bewegungsgesetz $r_1 + r_2 = r$ . — Die Ellipse (167—171)                                                                          | 162 |
| 167. Entstehung der Ellipse. — 168. Secanten. — 169. Eine Tan-<br>gente. — 170. Zwei Tangenten. — 171. Specielle Fälle der Ellipse.   |     |
| 2) Bewegungsgesetz $r_1 - r_2 = r$ . — Die Hyperbel (172—176)                                                                         | 170 |
| 172. Entstehung der Hyperbel. — 173. Secanten. — 174. Eine Tan-<br>gente. — 175. Zwei Tangenten. — 176. Specielle Fälle der Hyperbel. |     |
| 3) Bewegungsgesetz $r_1 \pm r_2 = \infty$ . — Die Parabel (177—180)                                                                   | 180 |
| 177. Entstehung der Parabel. — 178. Eine Tangente. — 179. Zwei<br>Tangenten. — 180. Krümmung und Krümmungskreis.                      |     |

---

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| Uebungssätze und Aufgaben . . . . . | 186 |
| Register . . . . .                  | 219 |
| Berichtigungen . . . . .            | 222 |

---

### Uebersicht der Fundamental-Aufgaben.

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Antragung eines Winkels an eine Gerade . . . . .                 | 54  |
| 2. Halbierung einer Strecke . . . . .                               | 57  |
| 3. Halbierung eines Winkels . . . . .                               | 58  |
| 4. Construction der Senkrechten in einem Punkte einer Geraden . .   | 58  |
| 5. Construction der Senkrechten aus einem Punkte auf die Gerade . . | 58  |
| 6. Construction der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt . | 68  |
| 7. Verwandlung eines $n$ -Ecks in ein $(n-1)$ -Eck . . . . .        | 71  |
| 8. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Rechteck . . . . .      | 72  |
| 9. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm . . . . .       | 72  |
| 10. Construction der vierten Proportionale zu drei Strecken . . . . | 106 |
| 11. Theilung einer Strecke nach gegebenem Verhältniss . . . . .     | 107 |
| 12. Construction harmonischer Punktepaare . . . . .                 | 107 |
| 13. Construction der mittleren Proportionale zu zwei Strecken . . . | 113 |
| 14. Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitt . . . . .       | 156 |

---



# Einleitung.

---

## 1. Ableitung der geometrischen Grundgebilde.

### a. Ableitung aus der Erfahrung mittelst des Begriffs der Grenze.

1. *Der Körper.* — Durch die Sinne des Gesichts und Gefühls gelangen wir zu der Vorstellung von Gegenständen, die erstens ausser uns für sich existiren und zweitens ihre Stellung zu einander und zu uns selbst ändern können. Alle diese Gegenstände können wir ohne Unterschied Körper nennen. (Beispiele.)

Das Gebiet, innerhalb dessen ein Körper existirt und seine Stellung zu einem andern verändern kann, nennen wir den Raum. Jeder Körper nimmt einen Theil des Raumes so vollständig ein, dass innerhalb dieses Raumtheiles kein zweiter Körper existiren kann. (Scheinbar widersprechendes Beispiel eines hohlen Körpers.)

Sehen wir von allen anderen Eigenschaften ab, durch welche sich ein Körper von einem anderen unterscheiden kann (z. B. Grösse, Gestalt, Stoff, Farbe, Gewicht, Temperatur), so bleibt die Ausfüllung eines bestimmten Raumtheiles als gemeinsame Eigenschaft aller Körper übrig, und wir können sagen, ein Körper sei ein Theil des Raumes.

Anm. Hiernach ist auch z. B. der Raum eines Zimmers, der Raum innerhalb eines Kastens ein Körper.

2. *Gebilde als Grenzen am Körper.* — Von dem umgebenden Raume wird der Körper getrennt durch eine Fläche (seine Oberfläche), welche den Körper vollständig begrenzt und gewöhnlich aus mehreren gleichartigen Theilen besteht, welche Figuren heissen. — Demnach ist schliesslich der 1. Körper ein vollständig begrenzter Theil des Raumes, und die Fläche ist die Grenze des Körpers. —



Umgekehrt: Jedes durch Figuren vollständig begrenzte Gebilde ist ein Körper.

Anm. Die vollständige Begrenzung gegen den umgebenden Raum ist ein wesentliches Merkmal des Körpers. So ist z. B. der Raum innerhalb eines geschlossenen Kastens ein Körper, nicht aber der Raum innerhalb eines offenen, weil in diesem Falle ein Theil der Fläche zur vollständigen Begrenzung fehlt. — In wieviel Figuren zerfällt die Fläche eines Würfels, eines Zimmers, der Wandtafel, einer Halbkugel, einer Kugel? — Will man die Zugehörigkeit der Figuren zum Körper hervorheben, so nennt man sie Seiten des Körpers.

Von der umgebenden Fläche wird jede einzelne Figur getrennt durch eine Linie (ihren Umfang), welche die Figur vollständig begrenzt, und gewöhnlich aus mehreren gleichartigen Theilen besteht, welche Strecken heissen. — Demnach ist  
2. die Figur ein vollständig begrenzter Theil der Fläche, und die Linie ist die Grenze der Figur. — Umgekehrt: Jedes durch Strecken vollständig begrenzte Gebilde ist eine Figur.

Anm. Wieviele Strecken dienen zur Begrenzung jeder Figur am Würfel, im Zimmer? Wieviele Strecken kommen überhaupt an jedem dieser Körper vor? In wieviel Strecken zerfällt der Umfang eines Halbkreises, eines Kreises? — Will man die Zugehörigkeit der Strecken zum Körper hervorheben, so nennt man sie Kanten des Körpers; hebt man aber ihre Zugehörigkeit zur Figur hervor, so nennt man sie Seiten der Figur.

Von den benachbarten Strecken wird jede einzelne Strecke getrennt durch zwei Punkte, welche die Strecke vollständig  
3. begrenzen. — Demnach ist die Strecke ein vollständig begrenzter Theil der Linie, und der Punkt ist eine Grenze der Strecke. — Umgekehrt: Jedes durch Punkte vollständig begrenzte Gebilde ist eine Strecke.

Anm. Wieviele Punkte kommen an jeder Fläche des Würfels, des Zimmers, sowie überhaupt an jedem dieser Körper vor? — Wann reicht ein einziger Punkt zur vollständigen Begrenzung einer Strecke aus? (Kreislinie.) — Jenachdem man die Zugehörigkeit eines Punktes zu einem Körper, einer Figur oder einer Strecke hervorheben will, nennt man ihn Ecke des Körpers, Eckpunkt (Ecke) der Figur, Endpunkt der Strecke.

Bezeichnet man die gegenüberliegenden Seitenpaare eines Würfels mit den Zahlen 1, 6; 2, 5; 3, 4, jede Kante durch die zwei und jede Ecke durch die drei Ziffern der in ihr zusammenstossenden Seiten: wie heissen dann die Kanten und Ecken, und welches sind die in einer gegebenen Ecke (Kante) zusammenstossenden Flächen und Kanten (Flächen)?

Wir erhalten also mittelst des Begriffs der Grenze, an den Raum anknüpfend, folgende erste Reihe von Erklärungen für die geometrischen Grundgebilde:



- |                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. Die Fläche ist die Grenze des Körpers.<br><br>4. Die Linie ist die Grenze der Fläche.<br><br>6. Der Punkt ist die Grenze der Linie. | 1. Der Körper ist ein vollständig begrenzter Theil des Raumes.<br>3. Die Figur ist ein vollständig begrenzter Theil der Fläche.<br>5. Die Strecke ist ein vollständig begrenzter Theil der Linie. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Aus den obigen Erklärungen folgt, dass Punkte, Linien (Strecken) und Flächen (Figuren) nicht für sich ausser uns existiren, sondern nur an Körpern. Wir können aber in unserer Vorstellung diese Gebilde von den Körpern loslösen und diese gedachten Punkte, Linien und Flächen für sich allein betrachten.

Anm. So sprechen wir auch im gewöhnlichen Leben von Punkten auf der Erdoberfläche, am Horizont, von Linien (Strassen), welche zwei solcher Punkte (Orte) verbinden, von Flächen (Grundstücken), indem wir durchaus nicht an die Verbindung dieser Gebilde mit der Erdkugel denken. Begrenzte Flächen auf der Erdoberfläche werden ebenso gekauft und verkauft, wie körperliche Gegenstände; ebenso haben Strassen, für deren Benutzung eine Abgabe erhoben wird (Eisenbahnlinien, Chausseen), verschiedenen Werth, je nach ihrer Länge; selbst Punkte der Erdoberfläche haben verschiedenen Werth, je nach ihrer Lage.

#### b. Ableitung durch Ueberlegung mittelst des Begriffs der Bewegung.

**3. Der Punkt.** — Die Aenderung, durch welche ein Körper in eine neue Stellung zu einem anderen Körper übergeht, nennen wir Bewegung. Wenn ein Körper sich bewegt, so bewegen sich die an ihm befindlichen Grenzgebilde, Flächen, Linien und Punkte mit ihm. Wir können daher auch die Bewegung dieser einzelnen Gebilde betrachten. Der Inbegriff der von einem Gebilde bei seiner Bewegung durchlaufenen Zustände heisst sein Weg.

Denken wir uns die Grösse eines Körpers ins Unendliche abnehmend, so verschwinden allmählig auch alle seine übrigen Eigenschaften. Nur der Ort, welchen er im Raume einnimmt, bleibt ihm erhalten. Er schrumpft alsdann zu einem Punkte zusammen. Dem Raume gegenüber ist also der Punkt nichts weiter als ein Ort, und wir können sagen: Der Punkt ist <sup>4.</sup> ein Ort im Raume.

Anm. Schon im gewöhnlichen Sprachgebrauche nennen wir Dinge aller Art Punkte, entweder, wenn wir sie in so grosser Entfernung sehen,



dass ihre Grösse verschwindend klein erscheint (Punkt am Horizonte), oder, sobald es sich um keine ihrer sonstigen Eigenschaften handelt, sondern nur um den Ort, welchen sie im Raume, auf einer Fläche, oder Linie einnehmen. In diesem Sinne werden z. B. Städte auf einer Landkarte, die Sterne am Himmel, Menschen, die wir aus grösserer horizontaler oder verticaler Entfernung erblicken, ja selbst Landflächen, sobald nur ihre Oertlichkeit hervorgehoben wird, als Punkte aufgefasst und bezeichnet. — Dieselbe Abstraction aber, welche uns von dem als Einheit aufgefassten Dinge zum Begriff der Zahl Eins führt, leitet uns auch von dem als Punkt aufgefassten Dinge zum Begriff des Punktes selbst.

4. *Gebilde als Resultate der Bewegung des Punktes.* — Bewegt sich ein Punkt ein Stück vorwärts, so ist die Reihe seiner Zustände durch den Anfangspunkt und den Endpunkt der Bewegung vollständig begrenzt, also nach 3\*) eine begrenzte
5. Linie oder Strecke; d. h.: Der Weg eines Punktes ist eine (begrenzte) Linie.

Anm. So ist der Weg eines als Punkt aufgefassten Fussgängers der als Linie betrachtete Fusspfad, der Weg der Bleistift- oder Federspitze auf Papier, der der Kreide auf der Tafel ein Strich. Andere Beispiele: Sternschnuppe; Flintenkugel, in einen Balken eindringend; Spitze der Nadel, einen weichen Gegenstand durchbohrend, u. s. w.

- Bewegt sich eine Strecke ein Stück vorwärts, so ist die Reihe ihrer Zustände durch die Anfangsstrecke und die Endstrecke der Bewegung, sowie durch die von ihren Begrenzungspunkten beschriebenen Strecken vollständig begrenzt, also nach
6. 2 eine begrenzte Fläche oder Figur; d. h.: Der Weg einer Strecke ist eine (begrenzte) Fläche.

Anm. So ist der Weg einer sich vorwärts bewegenden Truppenlinie eine Fläche, der Weg der Messerschneide beim Durchschneiden eines Körpers die Schnittfläche, u. s. w.

- Bewegt sich eine Figur ein Stück vorwärts, so ist die Reihe ihrer Zustände durch die Anfangsfigur und die Endfigur, sowie durch die von ihren Begrenzungsstrecken beschriebenen Figuren vollständig begrenzt, also nach 1 ein Körper oder be-
7. grenzter Raum; d. h.: Der Weg einer Figur ist ein (begrenzter) Raum.

Anm. So ist der Weg, den die vordere Fläche eines Hammers beim Schlag auf einen weichen Gegenstand beschreibt, ein vollständig begrenzter Raum, nämlich die hervorgebrachte Vertiefung. Der Weg, den die Oberfläche einer in einer Röhre sinkenden oder steigenden Flüssigkeit zurücklegt, ist der innere Raum der Röhre selbst.

Wir haben hiernach mittelst des Begriffs der Bewegung,

---

\*) Die einfachen Zahlen beziehen sich im ganzen Buche auf die am Rande stehenden Nummern der Sätze. Die Nummern der Abschnitte sind durch Nr. bezeichnet.



vom Punkte ausgehend, folgende zweite Reihe von Erklärungen für die geometrischen Grundgebilde erhalten:

1. Der Weg eines Punktes ist eine (begrenzte) Linie (Strecke).
2. Der Weg einer Strecke ist eine (begrenzte) Fläche (Figur).
3. Der Weg einer Figur ist ein (begrenzter) Raum (Körper).

Raum und Punkt sind verbunden durch die Erklärung: Der Punkt ist ein Ort im Raume.

## 2. Eigenschaften der geometrischen Grundgebilde.

### a. Ausdehnung.

5. Die Bewegung, durch welche ein Gebilde entstanden ist, haftet an ihm als eine Eigenschaft, die man Ausdehnung (Dimension) nennt.

Hiernach hat der Punkt, welcher nicht durch Bewegung entstanden ist, auch keine Ausdehnung; die Strecke hat eine Ausdehnung; die Figur, zu deren Entstehung zwei Bewegungen, die des Punktes und die der Strecke nöthig waren, zwei Ausdehnungen; der Körper aus ähnlichem Grunde drei Ausdehnungen.

Die Ausdehnung der Strecke heisst Länge; die beiden Ausdehnungen der Figur: Länge und Breite; die drei Ausdehnungen des Körpers: Länge, Breite und Dicke.

Anm. Bei manchen Körpern heisst die dritte Dimension Höhe, bei anderen Tiefe. Beispiele! (Würfel, Zimmer, Grube). Wie heisst in besonderen Fällen die Ausdehnung eines Körpers nach rechts und links, nach vorn und hinten, nach oben und unten?

### b. Grösse.

6. Durch die längere oder kürzere Dauer der Bewegung eines Gebildes erlangt sowohl die durch diese Bewegung entstehende Ausdehnung, wie das neu entstehende Gebilde selbst die Eigenschaft einer bestimmten Grösse.

Der Punkt hat hiernach keine Grösse. — Die Grösse der Strecke fällt zusammen mit derjenigen ihrer Länge, so dass für die Strecke die Ausdrücke „Grösse“ und „Länge“ dasselbe bedeuten. — Die Grösse der Figur richtet sich nach derjenigen ihrer Länge und Breite, die des Körpers nach derjenigen seiner Länge, Breite und Dicke.

Gebilde von gleicher Grösse heissen gleich (=).

Anm. Da nur Körper, nicht aber Punkte, Strecken und Figuren für sich existiren, so kann man solche Körper, bei denen eine oder mehrere Dimensionen im Vergleich mit den anderen sehr geringe Grösse haben,



als Bilder von wirklichen Flächen, Linien und Punkten ansehen, und dadurch der Anschauung zu Hilfe kommen. So sind Bilder von begrenzten Flächen: Ein Blatt Papier, eine Eierschale, der schwarze Ueberzug der Wandtafel; von begrenzten Linien: Ein Faden, ein Haar, der durch Bleistift, Feder oder Kreide hervorgebrachte Strich; von Punkten: Ein Sandkorn, der mit Bleistift, Feder oder Kreide hervorgebrachte Punkt. — Wie kann man zeigen, dass alle diese Dinge in Wahrheit Körper sind?

### c. Zusammensetzung und Theilung.

**7.** Haben zwei Strecken einen gemeinsamen Grenzpunkt, so kann man dieselben als eine einzige Strecke betrachten (Beispiele!) — Umgekehrt kann man den auf der Strecke sich bewegenden Grenzpunkt in jeder seiner Stellungen festhalten und als gemeinsamen Grenzpunkt zweier Strecken betrachten. Man kann also auf einer Strecke beliebig Punkte setzen, und jeder dieser Punkte theilt die Strecke in zwei Theile.

Anm. Bei Fortsetzung dieses Theilungsverfahrens durch Setzen neuer Punkte nimmt die Länge der Theile der Strecke allmähig ab und nähert sich schliesslich der Grenze Null. Da aber durch die Theilung die Grösse einer Strecke zwar beständig vermindert, aber nicht gänzlich aufgehoben werden kann, so kann man auch eine Strecke nicht in Punkte theilen, und ebensowenig durch Nebeneinanderlegen von Punkten eine Strecke zusammensetzen, da von den Punkten, welche selbst keine Länge haben, auch keiner zur Bildung der Länge der Strecke etwas beitragen kann. — Der Punkt selbst kann, da er keine Grösse hat, auch nicht getheilt werden.

Haben zwei Figuren eine gemeinsame Grenzstrecke, so kann man dieselben als eine einzige Figur betrachten (Beispiele!). — Umgekehrt kann man die auf der Figur sich bewegende Grenzstrecke in jeder ihrer Stellungen festhalten und als gemeinsame Grenzstrecke zweier Figuren betrachten. Man kann also in einer Figur beliebige Linien ziehen, und jede derselben theilt, gehörig verlängert, die Figur in zwei Theile.

Anm. Theilung der Figur durch Fortsetzung dieses Verfahrens in Stücke von immer geringerer Breite. Man kann eine Figur nicht in Strecken theilen, und nicht durch Nebeneinanderlegen von Strecken eine Figur zusammensetzen. Warum?

Haben zwei Körper eine gemeinsame Grenzfigur, so kann man dieselben als einen einzigen Körper betrachten (Beispiele!). — Umgekehrt kann man die in dem begrenzten Raum sich bewegende Grenzfigur in jeder ihrer Stellungen festhalten und als gemeinsame Grenzfigur zweier Körper betrachten. Man kann also durch einen begrenzten Raum beliebige Flächen legen, und jede derselben theilt, gehörig erweitert, den Körper in zwei Theile.

Anm. Theilung des Körpers durch Fortsetzung dieses Verfahrens in Stücke von immer geringerer Dicke. Man kann einen Körper nicht in



Flächenstücke theilen, und nicht durch Aufeinanderlegen von Flächentheilen einen Körper zusammensetzen.

#### d. Einfache und zusammengesetzte Bewegung.

8. Ein Punkt hat im Anfange seiner Ortsänderung die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen; das Unterscheidende dieser Bewegungen heisst ihre Richtung.

Behält der Punkt die zuerst gewählte Richtung bei, so heisst seine Bewegung einfach, und die von ihm beschriebene Strecke gerade. — Das besondere Merkmal einer einfachen Bewegung eines Punktes ist also ihre Richtung.

Bewegt eine gerade Strecke sich so, dass jeder ihrer Punkte eine einfache Bewegung ausführt, d. h. eine gerade Strecke beschreibt, so ist die ganze Bewegung der Strecke eine einfache, und die entstehende Figur heisst eben.

Anm. In ähnlicher Weise würde man durch einfache Bewegung ebener Figuren zu einer besonderen Art von Körpern gelangen, die man „räumliche Körper“ nennen könnte. Nun kennen wir jedoch zwar verschiedene Arten von Linien und Flächen, also dem entsprechend verschiedene Arten von Strecken und Figuren; aber wir kennen nur einen einzigen Raum, den einfachen Weltraum, demnach auch nur eine einzige Art von Körpern.

Ändert ein sich bewegendes Punkt in jedem Augenblicke seine Richtung, so heisst seine Bewegung zusammengesetzt, und die von ihm beschriebene Strecke krumm (Beispiel: Die Kreislinie). — Das besondere Merkmal einer zusammengesetzten Bewegung eines Punktes ist ein Gesetz, nach welchem die Änderung der Richtung in jedem Augenblicke erfolgt.

Alle nicht ebenen Flächen und Figuren heissen ebenfalls krumm (Beispiel: Die Kugelfläche).

Durch einfache Bewegung kann ein Gebilde nur auf 8. einem Wege von der Stelle, die es einnimmt, in eine bestimmte neue Stellung gelangen, durch zusammengesetzte Bewegung dagegen auf viele Arten.

#### e. Gestalt.

9. Durch das besondere Gesetz der Bewegung eines Gebildes erlangt das entstehende Gebilde die Eigenschaft einer bestimmten Gestalt.

Hiernach hat der Punkt keine Gestalt, alle geraden Linien, wie auch alle ebenen Flächen haben gleiche Gestalt; ebenso alle Linien und alle Flächen, welche durch dasselbe Bewegungsgesetz entstanden sind.

Anm. Für verschiedene Figuren auf derselben Fläche bildet die Gestalt der ihren Umfang bildenden Linie ein weiteres Unterscheidungs-



merkmal der Gestalt; ebenso für die Körper die Gestalt der sie begrenzenden Oberfläche.

Gebilde von gleicher Gestalt heissen ähnlich ( $\sim$ ), von gleicher Gestalt und Grösse: congruent ( $\cong$ ).

#### f. Begrenzte und unbegrenzte Bewegung.

**10.** Jede Bewegung eines Gebildes kann nicht nur begrenzt (wie bisher angenommen wurde), sondern auch unbegrenzt gedacht werden.

Soll ein Gebilde sich unbegrenzt bewegen, so muss seine Bewegung nicht nur ohne Ende, sondern auch ohne Anfang gedacht werden; sonst würde das Anfangsgebilde eine Grenze der Bewegung bilden.

Anm. Als Beispiel einer solchen Bewegung kann man sich die Bewegung der Erde um die Sonne vorstellen.

Betrachten wir nur einfache unbegrenzte Bewegungen, so gelangen wir zu folgenden Resultaten und Erklärungen:

1. Durch unbegrenzte Bewegung eines Punktes entsteht eine unbegrenzte gerade Linie, welche einfach eine Gerade genannt wird.

2. Durch unbegrenzte Bewegung einer Geraden entsteht eine unbegrenzte ebene Fläche, welche einfach eine Ebene genannt wird.

3. Durch unbegrenzte Bewegung einer Ebene entsteht ein unbegrenzter Raum, welcher einfach der Raum genannt wird.

Anm. Ausser der Geraden und der Ebene giebt es noch andere unbegrenzte Linien und Flächen, die durch zusammengesetzte Bewegung entstehen.

Da die Anzahl der Ausdehnungen eines Gebildes nicht von der Dauer, sondern nur von der Anzahl der einzelnen Bewegungen abhängt, durch die es entstanden, so hat die unbegrenzte Linie mit der begrenzten, die unbegrenzte Fläche mit der begrenzten, der unbegrenzte Raum mit dem begrenzten gleichviele Ausdehnungen. Wir können also die Gebilde nach Begrenzung und Anzahl ihrer Dimensionen in folgender Weise übersichtlich zusammenstellen, wobei die Gerade als specieller Fall unter der Linie, die Ebene als specieller Fall unter der Fläche begriffen ist.

|                                   |   | Begrenzt | Unbegrenzt |
|-----------------------------------|---|----------|------------|
| Anzahl<br>der<br>Dimen-<br>sionen | 0 | Punkt    |            |
|                                   | 1 | Strecke  | Linie      |
|                                   | 2 | Figur    | Fläche     |
|                                   | 3 | Körper   | Raum.      |



### g. Endliche und unendliche Bewegung.

**11.** Die Vorwärtsbewegung eines Punktes auf einer Strecke ist beendet, sobald er den Endpunkt der Strecke erreicht hat. Ebenso kann eine Strecke innerhalb einer Figur, und eine Figur in einem begrenzten Raume ihre Bewegung nicht beliebig fortsetzen. Innerhalb eines begrenzten Gebildes ist also nur eine Vorwärtsbewegung von endlicher Dauer möglich.

Dagegen kann ein Punkt auf einer unbegrenzten Linie sich ohne Aufhören vorwärts bewegen, ebenso eine Linie auf einer unbegrenzten Fläche, und eine Fläche im unbegrenzten Raume. Innerhalb eines unbegrenzten Gebildes ist also eine Vorwärtsbewegung von unendlicher Dauer möglich.

Eine unbegrenzte Linie hat endliche oder unendliche Grösse, (ist endlich oder unendlich) je nachdem der sie erzeugende Punkt bei endloser Vorwärtsbewegung wieder an einen früher eingenommenen Ort zurückkehrt oder nicht.

Anm. Jede in sich selbst zurückkehrende Linie, z. B. die Kreislinie, ist endlich, jede andere, z. B. die Gerade, unendlich. — Es giebt also 1) begrenzte, 2) unbegrenzte endliche, 3) unbegrenzte unendliche Linien. — Die begrenzten Linien sind selbstverständlich immer endlich.

Eine unbegrenzte Fläche hat endliche Grösse, wenn die sie erzeugende Linie selbst endliche Grösse hat und bei Fortsetzung ihrer Bewegung wieder in die frühere Lage zurückkehrt; andernfalls hat die Fläche unendliche Grösse.

Anm. Beispiel einer begrenzten Fläche: jede Figur; einer unbegrenzten endlichen: die Kugelfläche; einer unbegrenzten unendlichen: die Ebene

Was den Raum betrifft, so kennen wir nur den durch unendliche Bewegung der Ebene entstehenden unendlichen Raum, weil sich unsere Vorstellung aus dem reellen Abbilde dieses Raumes, dem Weltraume, nicht entfernen kann.

### 3. Die geometrischen Gebiete und ihre Eigenschaften.

**12. Eintheilung der Gebiete.** — Jedes unbegrenzte Gebilde kann als ein Gebiet betrachtet werden, in welchem begrenzte Gebilde von gleicher und geringerer, sowie unbegrenzte Gebilde von geringerer Anzahl der Dimensionen enthalten sein können.

Anm. So können auf einer Linie beliebige Punkte und Strecken angenommen werden, auf einer Fläche: Punkte, Linien, Strecken und Figuren, im Raume: Punkte, Linien, Strecken, Flächen, Figuren und Körper.

Ein Gebiet kann einfach genannt werden, wenn es durch lauter einfache Bewegungen entstanden ist. Die einfachen



Gebiete (zu denen man auch den Punkt rechnen kann) sind hiernach: 1) die Gerade, 2) die Ebene, 3) der Raum.

Ein Gebiet kann frei genannt werden, wenn es sich beliebig in sich selber bewegen kann, d. h. so, dass es bei der Bewegung nirgends aus sich selbst herauskommt. — Dazu ist erforderlich, dass die Bewegungen, durch welche das Gebiet entstand, solche waren, die sich stets gleich blieben. Dies leistet aber unter allen Bewegungen nur die einfache, und von den zusammengesetzten diejenige, welche eben durch das Gesetz bestimmt ist, dass sie sich stets gleich bleiben soll. Hiernach sind freie einfache Gebiete 1) die Gerade, 2) die Ebene, 3) der Raum. Von den nicht einfachen Gebieten sind es nur 1) die Kreislinie, 2) die Schraubenlinie, 3) die Kugel-  
fläche.

Anm. Zur Erläuterung können folgende Beispiele dienen: Wird ein Blatt Papier durch einen kreisförmigen oder geradlinigen Schnitt in zwei Theile getheilt, so kann man jeden Theil beliebig an dem andern entlang schieben, sodass die Ränder zusammenfallen. Dies entspricht der Beweglichkeit der Geraden und der Kreislinie in sich selbst, und ist bei keinem andern Schnitt möglich. — Eine ebene Tafel kann auf einer andern, und eine Kugel in einer gleich grossen Hohlkugel beliebig so bewegt werden, dass alle Punkte der einen Oberfläche die der anderen berühren. Unter allen Flächen haben nur die Ebene und die Kugel-  
fläche diese Eigenschaft der Beweglichkeit in sich selbst. (Anwendungen: Prüfung des Lineals, die kreisförmige Scheibe im Roulette-Spiel, die Schraube, Kugelgelenke im Körper der Wirbelthiere und an Instrumenten.) Auf allen andern Linien können keine, auf andern Flächen (z. B. der Kegel- und Cylinderfläche) höchstens besondere Arten der Bewegung des Gebildes in sich stattfinden. Die Freiheit des Raumes wird gewöhnlich durch den Satz ausgedrückt, dass der Raum überall gleich beschaffen sei.

Aus der Eigenschaft der Freiheit folgt noch, dass auch alle in einem solchen Gebiete enthaltenen Gebilde sich frei darin bewegen können, ohne ihre Gestalt zu ändern.

Statt ein Gebilde durch Bewegung an einen andern Ort zu versetzen, kann man auch annehmen, es sei an diesem Orte ein mit dem ersten an Gestalt und Grösse vollständig übereinstimmendes (congruentes) Gebilde hergestellt (construirt). — Man kann daher sagen, dass in einem freien Gebiete überall beliebig Gebilde construirt werden können, die unter sich congruent sind.

Ein Gebilde, welches sich in einem freien Gebiete beliebig bewegt, hat in Bezug auf dieses Gebiet stets dieselbe Lage; d. h. die Beziehungen des Gebildes zu dem Gebiete, in welchem es sich bewegt, ändern sich nicht durch die Bewegung.

Wenn in einem freien einfachen Gebiete zwei Gebilde



gleichgrosse und gleichgerichtete Bewegungen ausführen, so bleibt die Beziehung ihrer Lagen ungeändert.

**13.** Hiernach sind die wesentlichen Merkmale der einfachen geometrischen Gebiete folgende:

- a) Der Punkt ist ein Ort im Raume, ohne Ausdehnung. 9.
- b) Die Gerade ist 1. einmal ausgedehnt, 2. einfach, 10. 3. unbegrenzt, [4. unendlich (folgt aus 2. und 3.), 5. in sich beweglich (folgt aus 2.)].
- c) Die Ebene ist 1. zweimal ausgedehnt, 2. einfach, 11. 3. unbegrenzt, [4. unendlich, 5. in sich beweglich (aus gleichen Gründen wie in b)].
- d) Der Raum ist 1. dreimal ausgedehnt, 2. einfach, 3. un- 12. begrenzt, [4. unendlich, 5. in sich beweglich (wie oben)].

Anm. Insofern man die hier angegebenen Merkmale des Raumbegriffes auf den Weltraum überträgt, sind dieselben Axiome, deren wirkliche Geltung im Weltraum nicht bewiesen, sondern nur aus der Erfahrung geschöpft werden kann.

**14. Eintheilung der Raumwissenschaft.** — Die Lehre von den Gebilden, welche in den Gebieten der Geraden und der Ebene vorkommen, heisst Geometrie (speciell Longimetrie für die Gerade, Planimetrie für die Ebene), die Lehre von den Gebilden im Raume: Stereometrie.

Anm. Die Gebilde auf der Kreislinie stimmen in ihren Eigenschaften mit Gebilden der Ebene (Winkel), die Gebilde auf der Kugelfläche mit solchen des Raumes (Ecken) überein, und brauchen daher nicht für sich allein betrachtet zu werden.

Wir unterscheiden reine Geometrie und Stereometrie, in der die Gebilde an sich betrachtet, und rechnende Geometrie und Stereometrie, in der sie durch Zahlen dargestellt werden. Die rechnende Wissenschaft ist eine Anwendung der Arithmetik auf die reine Wissenschaft. — Derjenige Theil der rechnenden Geometrie, in welchem ausser den Grundgebilden noch die (später zu erklärenden) Winkel durch Zahlen dargestellt werden, heisst ebene Trigonometrie, und ein entsprechender Theil der Stereometrie: sphärische Trigonometrie.

Insofern es sich in der Trigonometrie um Funktionen von Winkeln handelt, ist dieselbe eine Anwendung der Funktionslehre auf die Raumwissenschaft.

Uebersicht über die Zweige der Raumwissenschaft:

| Geometrie.              | Stereometrie.                |
|-------------------------|------------------------------|
| 1. Reine Geometrie.     | 1. Reine Stereometrie.       |
| 2. Rechnende Geometrie. | 2. Rechnende Stereometrie.   |
| 3. Ebene Trigonometrie. | 3. Sphärische Trigonometrie. |



# Reine Geometrie.

## Erste Abtheilung: Geometrie der bewegten Gebilde.

### I. Geometrie der Geraden.

#### Der Punkt und seine Bewegung auf der Geraden.

*a)* Einmalige Bewegung des Punktes.

**15. Bestimmung des Punktes.** — Ein Punkt hat nur das Merkmal der Lage. Ein Punkt, der sich bewegt, kann hiernach nur seine Lage ändern. Zwei verschiedene feste Punkte unterscheiden sich nur durch ihre Lage. (Zwei Punkte mit derselben Lage fallen zusammen.)

Ein Punkt wird durch einen grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

- Die verschiedenen Zustände eines bewegten Punktes können selbst als feste Punkte betrachtet werden, d. h.: Ein bestimmter bewegter Punkt ist gleichbedeutend mit einer Reihe beliebiger fester Punkte.
- 13.

**16. Bestimmung der Geraden.** — Beschreibt ein Punkt *A* eine Gerade, so ist die Gerade bestimmt erstens durch die Lage des bewegten Punktes, zweitens durch die Richtung seiner Bewegung. Die Merkmale einer Geraden sind also Lage und Richtung. (Zwei Geraden mit derselben Lage und Richtung fallen zusammen.)

Durch die Richtung, welche ein Punkt *A* im Anfang seiner einfachen Bewegung einschlägt, sind alle Punkte, die er künftig durchlaufen wird, von vornherein mitbestimmt. Umgekehrt reicht jeder einzelne dieser Punkte (*B*) im Verein mit *A* dazu aus, diese Richtung zu bestimmen (8). Da jeder Punkt einer Geraden als erzeugender Punkt angesehen werden kann, so ist hiernach durch einen beliebigen Punkt auf einer Geraden ihre Lage, durch zwei beliebige Punkte der Geraden ihre Lage und Richtung, d. h. die Gerade selbst, vollkommen bestimmt. Anders ausgedrückt:

14. Durch zwei Punkte kann man nur *eine* Gerade ziehen.



Anm. Construction der Geraden, welche durch 2 gegebene Punkte gehen soll, mittelst des Lineals. (Zur Herstellung des Lineals ist bereits das Vorhandensein einer Geraden nöthig.) Andere Construction mittelst eines gespannten Fadens. (Wie unterscheidet sich diese Construction wesentlich von der vorigen? Wo wird sie angewendet?) Die zwischen zwei Punkten gezogene (sie verbindende) Strecke heisst die Verbindungslinie der Punkte.

Eine Gerade wird durch zwei an beliebige ihrer Punkte gesetzte grosse, oder durch einen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ebenso eine Strecke, bei welcher man jedoch die Endpunkte zur Bezeichnung wählt.

Aus 14 folgt: Bewegt eine Gerade sich so, dass sie beständig durch zwei feste Punkte geht, so bewegt sie sich in sich selbst.

Anm. Prüfung der Richtigkeit des Lineals durch Verschiebung an einer Geraden.

Eine Gerade und ein Punkt haben dieselbe Lage, wenn der Punkt auf der Geraden liegt (anders ausgedrückt: wenn die Gerade durch den Punkt geht); sonst verschiedene Lage.

Die Grösse der Bewegung eines Punktes auf einer Geraden wird durch die Länge der von ihm zurückgelegten Strecke veranschaulicht und gemessen.

β) Mehrmalige Bewegung des Punktes.

## Die Strecke und ihre Bewegung auf der Geraden.

### 1) Die geometrischen Operationen mit Strecken.

17. *Addition.* — Bewegt sich ein Punkt  $A$  auf einer Geraden erst nach  $B$  und dann weiter nach  $C$ , so hat er im Ganzen die Strecke  $AC$  zurückgelegt. Da die Strecke  $AC$  eben so lang ist, als die beiden Strecken  $AB$  und  $BC$  zusammen genommen, so kann man  $AC$  als Summe\*) von  $AB$  und  $BC$  betrachten. Demnach ist

$$1) \quad AB + BC = AC. \quad \text{Fig. 1. } \overset{A}{\text{-----}} \overset{B}{\text{-----}} \overset{C}{\text{-----}}$$

Anm. Es wird also der Begriff der Summe von Zahlen auf Strecken übertragen. Die Addition der Strecken ist aber keine Rechnungs- sondern eine geometrische Operation, welche sich, wie sogleich gezeigt wird, durch Constructionen bewerkstelligen lässt. Wie umgekehrt Constructionen sich durch Rechnungen ersetzen lassen, wird in dem Abschnitt über rechnende Geometrie gezeigt werden.

Aus der gegenseitigen Stellung der Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  ergibt sich die Regel:

\*) Vgl. Theil I, Nr. 6.



15. Soll man zwei Strecken addiren, so legt man sie so *hinter* einander, dass ihre Endpunkte zusammenfallen. Dann ist ihre Summe die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten.

Anm. Addition mehrerer Strecken durch wiederholte Anwendung von 15.

18. *Subtraction.* — Aus 1) folgt:

$$2) AC - BC = AB.$$

Demnach ist  $AB$  die Differenz zwischen  $AC$  und  $BC$ , und Fig. 1 liefert die Regel:

16. Soll man eine Strecke von einer andern subtrahiren, so legt man sie so *auf* einander, dass ihre Endpunkte zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz die Strecke zwischen ihren anderen Endpunkten.

Sind die durch Subtraction zu vereinigenden Strecken einander gleich, so fallen auch ihre zweiten Endpunkte zusammen; also:

17. Legt man zwei gleiche Strecken so auf einander, dass ihre ersten Endpunkte zusammenfallen, so fallen auch ihre zweiten Endpunkte zusammen.

Umgekehrt ist das Aufeinanderfallen der beiderseitigen Endpunkte ein Zeichen für die Gleichheit der Strecken; also:

18. Kann man zwei Strecken so auf einander legen, dass ihre beiderseitigen Endpunkte zusammenfallen, so sind die Strecken gleich.

Anm. Zwei Strecken werden in die zum Addiren oder Subtrahiren erforderliche Lage gebracht, indem man sie (am bequemsten mittelst des Cirkels) auf der Geraden hinter oder auf einander abträgt.

Regel 16 dient auch in der Praxis zur Vergleichung der Länge zweier Strecken (Gegenstände). Beispiele!

19.\* *Multiplication.*\*) — Trägt man dieselbe Strecke ( $a$ )  $n$ -mal hinter einander auf einer Geraden ab, so erhält man eine Strecke ( $b$ ), welche  $n$ -mal so lang ist als die gegebene. Durch diese Construction ist also die gegebene Strecke ( $a$ ) mit der Zahl  $n$  multiplicirt worden, und man hat

$$3) n \cdot a = b.$$

*Theilung.*\*\*) — Aus 3) folgt

$$4) \frac{b}{n} = a.$$

\*) Die mit einem Stern bezeichneten Abschnitte können bei der ersten Durchnahme übergangen werden.

\*\*) Vgl. Theil I, Nr. 25, Anm.



Die in dieser Gleichung enthaltene Aufgabe, eine Strecke  $b$  in  $n$  gleiche Theile zu theilen, ist ohne eine aus dem Gebiete der Geraden heraustretende Construction nicht lösbar und wird später behandelt werden (Anm. zu 33).

20.\* *Messung.* — Aus 3) folgt ferner:

$$5) \frac{b}{a} = n;$$

d. h.: Der Quotient zweier Strecken ist eine Zahl. Die 19. Strecke  $b$  wird durch die Strecke  $a$  gemessen, indem man  $a$  so oft als möglich auf  $b$  abträgt.

Bleibt hierbei kein Rest, so ist der Quotient der Strecken eine ganze Zahl.

Bleibt ein Rest, so hat man das grösste gemeinsame Mass zwischen  $a$  und  $b$  zu suchen, d. h. die grösste Strecke, durch welche sich sowohl  $a$  wie  $b$  ohne Rest messen lässt. Wenn in diesem Falle das gemeinsame Mass  $p$ -mal in  $a$  und  $q$ -mal in  $b$  enthalten ist, so ist der Quotient der beiden Strecken  $\frac{q}{p}$ , d. h. ein Bruch.

Das grösste gemeinsame Mass zwischen zwei Strecken  $a$  und  $b$  wird bestimmt,\*) indem man die kleinere so oft als möglich auf der grösseren abträgt, dann ebenso den Rest auf der kleineren, u. s. w., bis kein Rest mehr bleibt. Die zuletzt abgetragene Strecke ist das gesuchte grösste gemeinsame Mass.

Anm. Obwohl bei der eben beschriebenen Construction die Reste immer kleiner werden, ist es doch nicht nöthig, dass schliesslich einer derselben gleich Null ist; vielmehr kann es vorkommen, dass die Reste nur beständig abnehmen, ohne den Werth Null wirklich zu erreichen. In diesem Falle ist der Quotient der beiden Strecken eine irrationale Zahl, und ein gemeinsames Mass existirt nicht. — Die praktische Ausführung der Construction wird freilich, da sie nicht vollkommen genau sein kann, stets ein gemeinsames Mass liefern. Der durch dasselbe erhaltene Quotient hat dann die Genauigkeit eines Näherungswerthes.

Setzt man in 5)  $a = 1$ , so wird  $b = n$ , d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend eine bestimmte Strecke  $= 1$ , so kann man alle Strecken als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in dem Abschnitt über rechnende Geometrie.

## 2) Entgegengesetzte Richtungen einer Geraden.

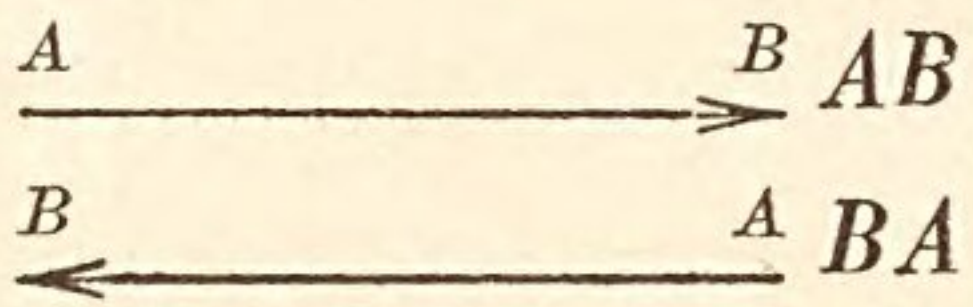
21. Eine Strecke  $AB$  auf einer Geraden kann sowohl durch Bewegung des Punktes  $A$  nach  $B$ , wie durch Bewegung von

---

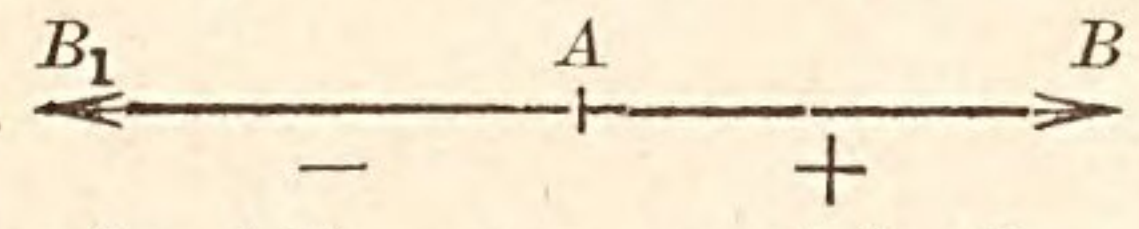
\*) Vgl. Theil I, Nr. 157, 1).



$B$  nach  $A$  entstehen. Die Richtungen dieser beiden Bewegungen heissen einander entgegengesetzt. Die erste Bewegung kann über  $B$ , die zweite über  $A$  hinaus beliebig fortgesetzt werden.

20.  Demnach hat auch jede Gerade zwei entgegengesetzte Richtungen, die in der Zeichnung (Fig. 2) durch einen Pfeil, in der Benennung durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben unterschieden werden können ( $AB$  und  $BA$ ).

Aus 20 folgt: Jeder Punkt auf einer Geraden kann sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen bewegen. Von einem Punkte aus kann man eine Strecke auf einer Geraden auf zweifache Weise abtragen. — Ueberhaupt kann man von einem Punkte aus auf einer Geraden jede Construction auf zwei entgegengesetzte Arten ausführen.

21. Gleiche Constructions von einem Punkt aus nach entgegengesetzten Richtungen einer Geraden geben gleiche aber entgegengesetzte (*symmetrische*) Resultate. (In Fig. 3 z. B. sind  die an Länge gleichen Strecken  $AB$  und  $AB_1$  symmetrisch, und die Punkte  $B$  und  $B_1$  liegen symmetrisch zu  $A$ .)

**22.\* Positive und negative Strecken.** — Man kann den Gegensatz zwischen positiven und negativen Zahlen dadurch auf Strecken übertragen, dass man die eine der beiden Richtungen einer Geraden, sowie alle nach dieser Richtung genommenen Strecken als positiv, die andere Richtung und die nach derselben genommenen Strecken als negativ betrachtet.\*) —

Wird in Fig. 3 die Richtung  $AB$  als positiv betrachtet, so ist  $AB_1$  negativ, und es ist

$$AB_1 = -AB.$$

Da ferner

$$AB_1 = BA$$

(weil beide Strecken gleich lang und gleich gerichtet sind), so ist auch

22.  $BA = -AB$ ; oder  $AB + BA = 0$ .

Anm. Die letzte Formel sagt, dass die Bewegung von  $A$  nach  $B$  und nach  $A$  zurück die Lage des Punktes  $A$  um die Strecke 0, d. h. gar nicht geändert hat; die vorletzte, dass eine Strecke ihr Vorzeichen ändert, wenn man ihre beiden Endpunkte mit einander vertauscht.

\*) Vgl. Theil I, Nr. 61 am Ende.



**23.\* Erweiterung.** — Sind auf einer Geraden drei Punkte  $A, B, C$  gegeben, so ist (nach 15)

1) wenn  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt:  $AB + BC = AC$ ,

2) wenn  $C$  zwischen  $B$  und  $A$  liegt:  $BC + CA = BA$ ,

oder:

$$BC - AC = -AB \quad (22)$$

oder:

$$AB + BC = AC \quad (\text{Th. I, 110}),$$

3) wenn  $A$  zwischen  $C$  und  $B$  liegt:  $CA + AB = CB$ ,

oder:

$$-AC + AB = -BC,$$

oder:

$$AB + BC = AC.$$

Hieraus folgt: Sind auf einer Geraden drei Punkte  $A, B, C$  in beliebiger Lage gegeben, so ist stets

$$AB + BC = AC, \text{ oder } AB + BC + CA = 0.$$

Sind zwei anstossende Strecken (Fig. 3)  $B_1A$  und  $AB$  gleich lang, so heisst  $A$  die Mitte zwischen den Punkten  $B_1$  und  $B$ . Die Mitte zwischen zwei Punkten halbirt also die Verbindungsstrecke der beiden Punkte, und heisst daher Halbierungspunkt der Strecke.

### 3) Bewegung der Strecke auf der Geraden.

**24.\*** Bewegt sich eine Strecke  $AB$  auf einer Geraden bis  $A_1B_1$ , so bleibt der Lagenunterschied ihrer Endpunkte ungeändert; d. h.: der eine Endpunkt hat sich ebensoweit bewegt als der andere. Ist also

$$1) \quad AB = A_1B_1,$$

so ist auch

$$2) \quad AA_1 = BB_1$$

und umgekehrt. (Dasselbe Resultat folgt, wenn man auf beiden Seiten von 1) die Strecke  $BA_1$  addirt.)

Ist  $M$  die Mitte zwischen  $B$  und  $A_1$ , so ist

$$3) \quad BM = MA_1;$$

ferner

$$1) \quad AB = A_1B_1;$$

also durch Addition:

$$4) \quad AM = MB_1;$$

d. h.:  $M$  ist auch die Mitte zwischen  $A$  und  $B_1$ . Oder:

Sind zwei Strecken auf einer Geraden einander gleich, so haben die Strecken zwischen dem Anfangs-



punkte der einen und dem Endpunkte der andern denselben Halbierungspunkt.

Statt die Strecke  $AB$  nach  $A_1B_1$  zu bewegen, kann man auch von  $A_1$  aus eine mit  $AB$  gleiche und gleich gerichtete Strecke  $A_1B_1$  construiren. (Vgl. Nr. 12.) Und allgemein:

25. Gleiche Constructionen von verschiedenen Punkten aus nach derselben Richtung einer Geraden geben gleiche und gleichstimmige (*congruente*) Resultate. (In Fig. 5 z. B. sind die an Länge gleichen Strecken  $AB$  und  $A_1B_1$  congruent.)

25.\* *Erweiterung.* — Ist  $M$  die Mitte zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$ , so ist  $AM = MB$ , oder  $MB - AM = 0$ , oder

$$MB + MA = 0.$$

Ebenso nennt man  $M$  die Mitte (den Schwerpunkt) zwischen  $n$  Punkten  $A, B, C, \dots N$ , wenn

$$MA + MB + \dots + MN = 0$$

ist.

Wenn auf einer Geraden die Summe einer Reihe von Strecken gleich Null ist, also

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + \dots = 0,$$

so kann man (nach 23), wenn  $R$  ein beliebiger Punkt der Geraden ist, schreiben:

$$AA_1 = RA_1 - RA; \quad BB_1 = RB_1 - RB; \quad \dots$$

Dies eingesetzt giebt:

$$RA + RB + RC + \dots = RA_1 + RB_1 + RC_1 + \dots$$

26. d. h.: Ist die Summe von  $n$  Strecken auf einer Geraden gleich Null, so ist für jeden Punkt der Geraden die Summe seiner Verbindungsstrecken mit den Anfangspunkten gleich der Summe seiner Verbindungsstrecken mit den Endpunkten.

Wenn insbesondere die Punkte  $A_1, B_1, C_1 \dots$  alle mit dem Schwerpunkte  $M$  der Punkte  $A, B, C \dots$  zusammenfallen, so ist

$$RA_1 = RB_1 = RC_1 = \dots = RM,$$

und

$$RA + RB + RC + \dots = n \cdot RM;$$

27. d. h.: Die Summe der Verbindungsstrecken eines beliebigen Punktes einer Geraden mit  $n$  andern Punkten ist gleich der  $n$ -fachen Verbindungsstrecke mit dem Schwerpunkte derselben.

Anm. Hierdurch ist die Aufgabe, den Schwerpunkt zwischen  $n$  Punkten einer Geraden zu construiren, zurückgeführt auf die Aufgabe, eine gegebene Strecke in  $n$  gleiche Theile zu theilen.



## II. Geometrie der Ebene.

### a. Die Gerade und ihre Bewegungen in der Ebene.

#### $\alpha$ ) Einmalige Bewegung der Geraden.

**26. Bestimmung der Geraden.** — Eine Gerade hat die Merkmale der Lage und Richtung. Eine Gerade, die sich bewegt, kann hiernach entweder ihre Lage oder ihre Richtung ändern. Zwei Geraden können sich entweder durch ihre Lage oder durch ihre Richtung unterscheiden. (Zwei Geraden mit derselben Lage und Richtung fallen zusammen.)

Die verschiedenen Zustände einer bewegten Geraden können selbst als feste Geraden betrachtet werden, d. h.: Eine bestimmte bewegte Gerade ist gleichbedeutend mit einer Reihe beliebiger fester Geraden.

#### 1) Lagenänderung der Geraden.

**27. Bewegung der Geraden.** — Ist eine Gerade  $a$  durch Aenderung ihrer Lage (ohne ihre Richtung zu ändern) in  $b$  übergegangen, so darf kein Punkt zugleich auf  $a$  und  $b$  liegen; denn sonst könnte dieser Punkt durch seine Bewegung jede der beiden Geraden erzeugen, und da die Lage einer Geraden durch einen beliebigen ihrer Punkte bestimmt wird (Nr. 16), so hätten beide Geraden dieselbe Lage, gegen die Annahme. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Geraden Verschiebung.

Verschiebung einer Geraden ist also Aenderung ihrer Lage mit Beibehaltung ihrer Richtung. — Zwei Geraden ( $a, b$ ) mit verschiedener Lage aber gleicher Richtung heissen parallel. (In Zeichen  $a \parallel b$ .)

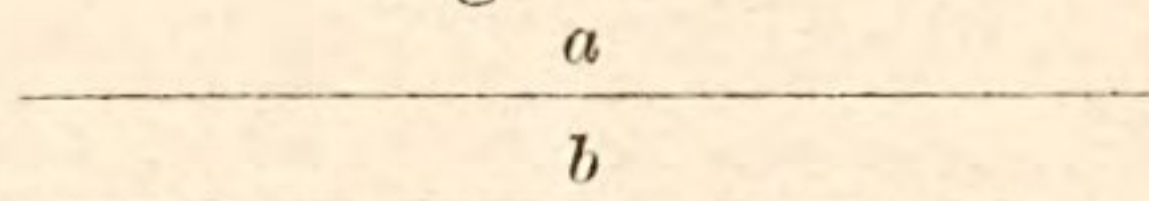
Anm. Diesen Namen führen die Geraden auch dann noch, wenn eine von ihnen in entgegengesetzter Richtung genommen wird. Ist es nöthig, diesen Fall besonders zu bezeichnen, so kann man zwei Geraden mit verschiedener Lage und entgegengesetzter Richtung antiparallel nennen.

Zwei parallele (bezw. antiparallele) Geraden entstehen, wenn zwei verschiedene Punkte sich nach gleichen (bezw. entgegengesetzten) Richtungen bewegen.

Hat eine Gerade ihre Lage geändert, so hat auch jeder Punkt auf ihr seine Lage um dieselbe Strecke geändert. Denn alle ihre Punkte haben gleichgrosse und gleichgerichtete Bewegungen (Lagenänderun-

Fig. 6.

29.





gen) gemacht. — Wie die Lage einer Geraden durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung durch diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr.

Eine Gerade kann aus der Lage  $a$  auf unzählige Arten in die Lage  $b$  kommen. — Die Lagenänderung der Geraden ist einfach, wenn diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr eine einfache ist, d. h. wenn ein beliebiger Punkt auf ihr eine beliebige Gerade beschreibt, oder, anders gesagt, wenn ein beliebiger Punkt auf ihr die Richtung auf einen beliebigen festen Punkt der zweiten Geraden innehält. Das von der Geraden beschriebene Gebilde ist in diesem Falle (nach 8) eine Ebene.

Anm. Die Bestimmung der Ebene durch Punkte und Linien wird in der Stereometrie gegeben werden.

Hiernach kann man in einer Ebene zu einer in ihr gegebenen Geraden beliebige Parallelen ziehen.

30. Durch einen ausserhalb einer Geraden gegebenen Punkt kann man nur *eine* Parallele zu der Geraden ziehen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebenen Punkt, und ihre Richtung durch die gegebene Gerade vollkommen bestimmt; also ist die Parallele selbst vollkommen bestimmt.

31. Aus dem Begriff der Gleichheit folgt, dass zwei Richtungen, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind. Folglich: Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

28.\* *Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.* — Wie die Lage einer Geraden durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung (Verschiebung) durch diejenige eines beliebigen ihrer Punkte. Bewegt sich nun eine Gerade so, dass einer ihrer Punkte selbst eine Gerade beschreibt, so ist die Lagenänderung des Punktes, mithin auch diejenige der Geraden, durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke bestimmt. Gleichen Lagenänderungen entsprechen also gleiche von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegte Strecken. Verschiedene Lagenänderungen verhalten sich an Grösse wie die entsprechenden von dem Punkte auf der Geraden zurückgelegten Strecken. — Da ein Punkt  $A$  der Geraden  $a$  (Fig. 7) durch geradlinige Bewegung jeden Punkt ( $B$ ) der parallelen Geraden  $b$  erreichen kann, so kann auch die Gerade  $a$  auf unendlich viele Arten in die Lage  $b$



kommen. Die auf einander folgenden Lagenänderungen von  $a$  verhalten sich also wie die entsprechenden von dem Punkte  $A$  auf einer beliebigen Geraden zurückgelegten Strecken. Da überdies der Punkt  $A$  beliebig ist, so folgt der Satz:

Werden zwei sich schneidende oder parallele 32. Geraden von einer Anzahl Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf der einen Geraden ebenso wie die auf der anderen.

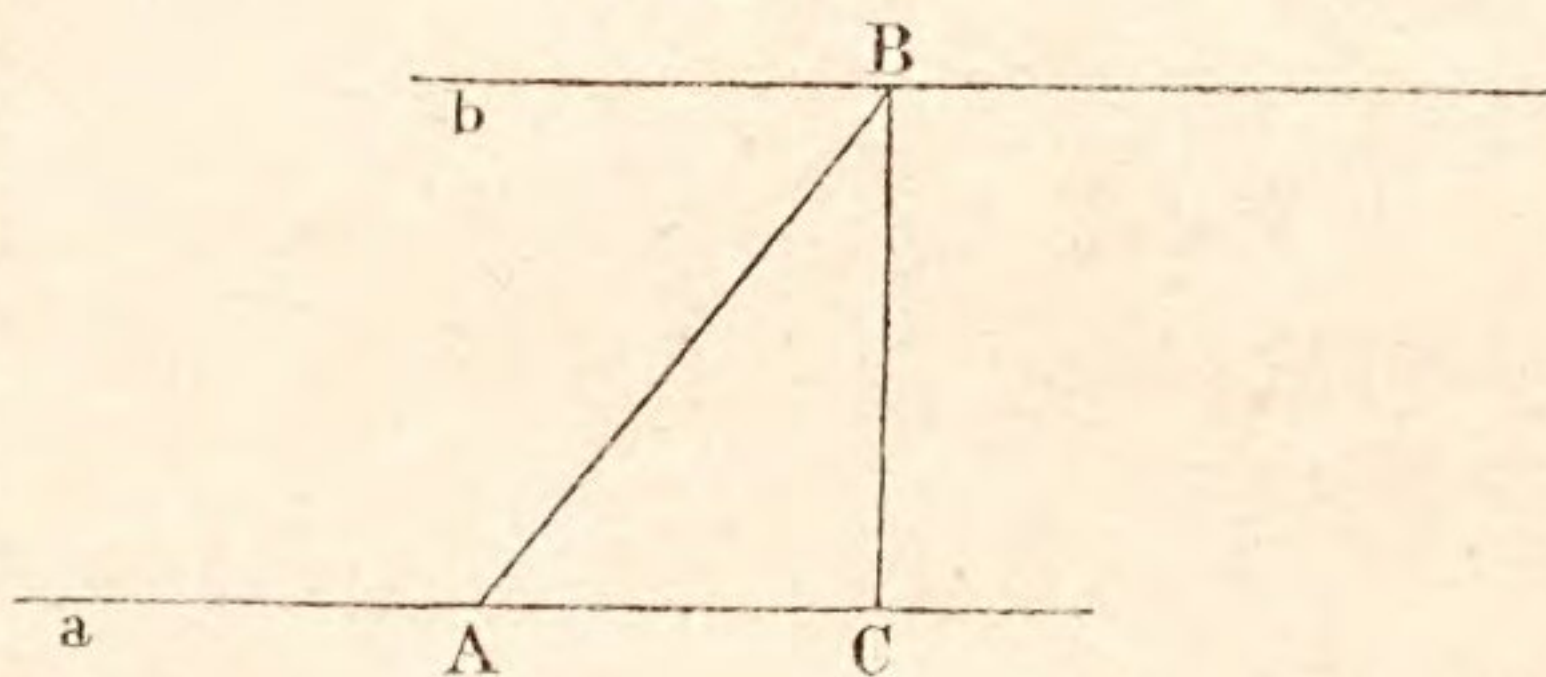
Aus 32 folgt weiter:

Werden auf *einer* Geraden durch eine Anzahl von 33. Parallelen gleiche Stücke abgeschnitten, so werden auch auf jeder anderen Geraden durch diese Parallelen gleiche Stücke abgeschnitten.

Anm. Hiernach kann eine Strecke  $AB$  dadurch in  $n$  gleiche Theile getheilt werden, dass man auf einer beliebigen durch  $A$  gezogenen Geraden von  $A$  aus  $n$  beliebige, aber unter sich gleiche Theile abträgt, den letzten Theilpunkt  $B_1$  mit  $B$  verbindet, und durch die übrigen Theilpunkte die Parallelen zu  $BB_1$  zieht.

Wenn eine Gerade ihre Lage ändert, so ist mit dieser Bewegung im Allgemeinen noch ein Fortrücken in ihrer eigenen Richtung (eine Bewegung der Geraden in sich selbst) verbunden. Verschiebt sich nun die Gerade  $a$  (Fig. 7) nach  $b$  so, dass Punkt  $A$  in gerader Linie nach  $B$  rückt, so hat  $A$  ebenso wie die Gerade  $a$  sich nicht nur seitwärts bewegt, sondern ist auch in der Richtung der Geraden um ein Stück

Fig. 7.



vorwärts gekommen. Die Bewegung eines Punktes der Geraden wird aber nur dann die Grösse ihrer reinen Verschiebung bestimmen, wenn die Gerade nur ihre Lage ändert, ohne in ihrer Richtung fortzurücken. Man kann nun die doppelte Bewegung der Geraden (wenn  $A$  nach  $B$  rückt) durch zwei nach einander folgende einzelne Bewegungen ersetzen, nämlich durch ein blosses Fortrücken der Geraden in ihrer Richtung, wobei  $A$  bis  $C$  geht, und eine blosser Lagenänderung, wobei  $C$  bis  $B$  geht. Dann also stellt die Strecke  $AB$  die doppelte Bewegung dar, welche die Gerade ausführt, wenn  $A$  nach  $B$  rückt; die Strecke  $AC$  ist diejenige, um welche die Gerade in ihrer eignen Richtung vorrückt, und die Strecke  $CB$  ist diejenige, welche die blosser Lagenänderung der Geraden bestimmt. Damit ein Punkt ( $C$ ) der Geraden ( $a$ ) durch seine Bewegung die Grösse

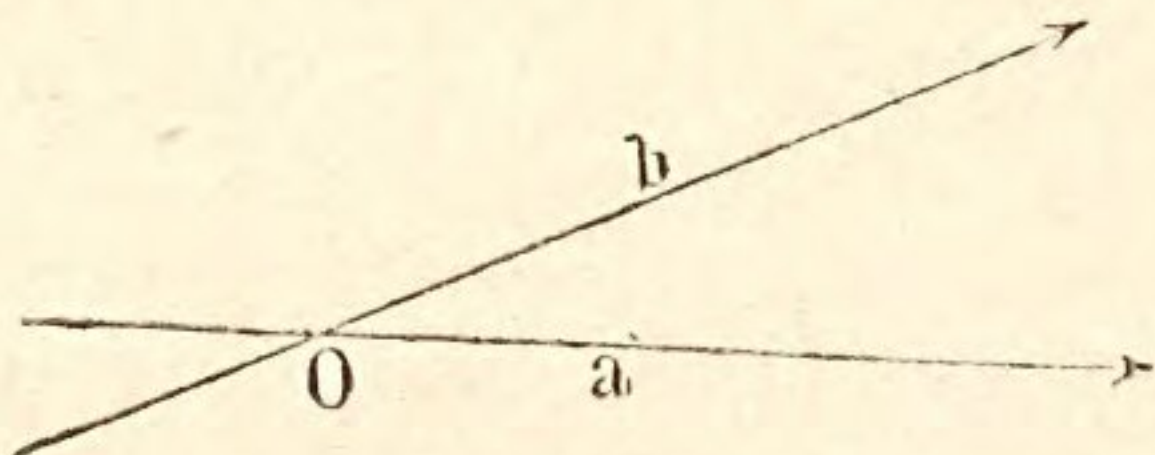


der reinen Verschiebung der Geraden bestimme, muss seine Bewegungsrichtung ( $CB$ ) von den beiden Richtungen der Geraden um gleich viel verschieden sein. (Vgl. Fig. 12.)

## 2) Richtungsänderung der Geraden. — Der Winkel.

**29. Drehung.** — Ist eine Gerade  $a$  durch Aenderung ihrer Richtung (ohne ihre Lage zu ändern) in  $b$  übergegangen, so giebt es jedenfalls einen einzigen Punkt auf ihr, welcher an der Bewegung nicht theilnahm, den also  $b$  mit  $a$  gemeinsam hat. — Denn gäbe es keinen solchen Punkt, so hätten beide Geraden nicht dieselbe Lage; gäbe es aber darin mehr als

Fig. 8.



einen, so wären beide Geraden in derselben Weise bestimmt (nach 14); also könnte keine Richtungsänderung stattgefunden haben. — Wir nennen diese Art der Bewegung einer Geraden Drehung, den ruhenden Punkt  $O$  den Drehungspunkt, und sagen,  $a$  habe sich um  $O$  bis  $b$  gedreht.

Drehung einer Geraden ist also Aenderung ihrer Richtung mit Beibehaltung ihrer Lage. Von zwei Geraden mit verschiedener Richtung aber derselben Lage sagt man, sie schneiden sich.

Zwei sich schneidende Geraden entstehen, wenn zwei zusammenfallende Punkte  $O$  sich nach verschiedenen Richtungen bewegen.

Auf zwei sich schneidenden Geraden bewegen sich zwei Punkte in convergenten Richtungen, wenn sie sich beide dem Schnittpunkte nähern; in divergenten Richtungen, wenn sie sich beide von ihm entfernen. Demnach heissen auch je zwei zum Schnittpunkt hinführende Richtungen convergent, je zwei vom Schnittpunkt wegführende divergent.

34. Zwei Geraden können sich nur in *einem* Punkte schneiden. Denn nach 14 müssen zwei Geraden, die zwei Punkte gemeinsam haben, zusammenfallen.

Eine Gerade kann aus der Richtung  $a$  auf unzählige Arten in die Richtung  $b$  kommen. Die Bewegung der Geraden  $a$  wird einfach sein, wenn ein beliebiger Punkt auf ihr in jedem Augenblicke die Richtung auf einen bestimmten beweglichen Punkt der Geraden  $b$  innehält.\*) Das von der Geraden be-

\*) Denn da ein beliebiger fester Punkt mit einem bestimmten beweglichen Punkte gleichbedeutend ist (13), so ist die Bewegung der



schriebene Gebilde ist also in diesem Falle wiederum eine Ebene.

Hiernach kann man in einer Ebene durch einen in ihr gegebenen Punkt beliebige sich schneidende Geraden ziehen. — Man kann also auch zwei beliebige Punkte einer Ebene 35. durch eine ganz in ihr liegende Gerade verbinden.

**30. Beziehungen zwischen zwei Geraden.** — Verschiebung und Drehung sind hiernach zwei verschiedene Arten einfacher Bewegung, die von einer Geraden ausgeführt werden können. \*)

Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass allgemein die Gesetze gelten:

Zwei Geraden mit derselben Lage haben stets ungleiche Richtung.

Zwei Geraden mit gleicher Richtung haben stets verschiedene Lage

Da aber eine Gerade durch zwei aufeinanderfolgende Bewegungen Lage und Richtung ändern kann (wobei sie durch die zweite Bewegung das Gebiet der durch die erste bestimmten Ebene verlässt), so gelten nur für zwei in derselben Ebene liegende Geraden die beiden umgekehrten Gesetze:

Zwei Geraden mit verschiedener Lage haben gleiche Richtung.

Zwei Geraden mit ungleicher Richtung haben dieselbe Lage.

Zwei Parallelen theilen die Ebene in drei, zwei sich schneidende Geraden in vier unvollständig begrenzte Theile.

## Der Winkel.

**31. Vorbemerkung.** — Wenn ein Punkt auf einer Geraden seine Lage ändert, so wird die Grösse der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht und gemessen (wie schon oben bemerkt). — Wenn dagegen eine Gerade in einer Ebene sich bewegt, so kann die Grösse der Bewegung nicht durch die Grösse des Flächenstückes be-

---

Geraden in diesem zweiten Falle im Wesentlichen ebenso bestimmt wie im ersten, nämlich als einfache. — Die Bewegung eines ihrer Punkte kann aber diesmal natürlich keine einfache sein; denn nur dann, wenn die Gerade jenes Merkmal ändert, welches sie mit dem Punkte gemeinsam hat, nämlich die Lage, können beide Gebilde in der Einfachheit der Bewegung übereinstimmen.

\*) Wie die Verschiebung als specieller Fall der Drehung betrachtet werden kann, wird später gezeigt werden. (Nr. 58.)



stimmt werden, welches von der Geraden beschrieben wird. Denn dieses Flächenstück ist, wie die Gerade selbst, von unbestimmter (unendlicher) Grösse. — Während aber die Grösse der Verschiebung einer Geraden wenigstens durch die von einem ihrer Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht und gemessen werden kann (wie oben bemerkt), findet für die Grösse der Drehung einer Geraden nichts ähnliches statt. In ihrer Beurtheilung muss das Auge sich ebenso üben, wie in derjenigen der Bewegungsgrösse eines Punktes, wenn nur Anfangs- und Endstellung desselben, nicht aber die verbindende gerade Strecke gegeben ist.

Anm. Da hiernach die Grösse der Drehung einer Geraden durch kein geometrisches Gebilde dargestellt wird, so ist eine besondere Benennung dafür erforderlich. — Uebrigens wird später gezeigt werden, wie wenigstens zum Zweck der Vergleichung mehrere solche Grössen durch Liniestücke dargestellt werden können (Nr. 35).

Damit die Drehungsgrösse zwischen zwei Geraden nicht eine vieldeutige Grösse sei, ist es vor allem nöthig, auf jeder der beiden Geraden eine ihrer beiden Richtungen festzuhalten.

Anm. Dies kann entweder dadurch geschehen, dass man die Richtungen durch Pfeile bezeichnet, oder dadurch, dass man die Geraden nur von ihrem Schnittpunkt aus zeichnet und nur diejenigen Richtungen gelten lässt, nach welchen sich dann der Schnittpunkt bewegen kann.

**32. Definition des Winkels.** — Unter der eben gemachten Voraussetzung kann nun die Erklärung aufgestellt werden:

Die Drehungsgrösse zwischen zwei Geraden heisst ihr *Winkel*.

Der Schnittpunkt der Geraden heisst Scheitel des Winkels, die Geraden selbst, vom Scheitel an gerechnet, heissen Schenkel des Winkels.

Anm. Ein Schenkel des Winkels beschreibt bei seiner Drehung einen Theil der Ebene. Dieser wird von den beiden Schenkeln unvollständig begrenzt. — Unter der Lage eines Winkels versteht man die Lage dieses von seinen Schenkeln eingeschlossenen Ebenenstückes.

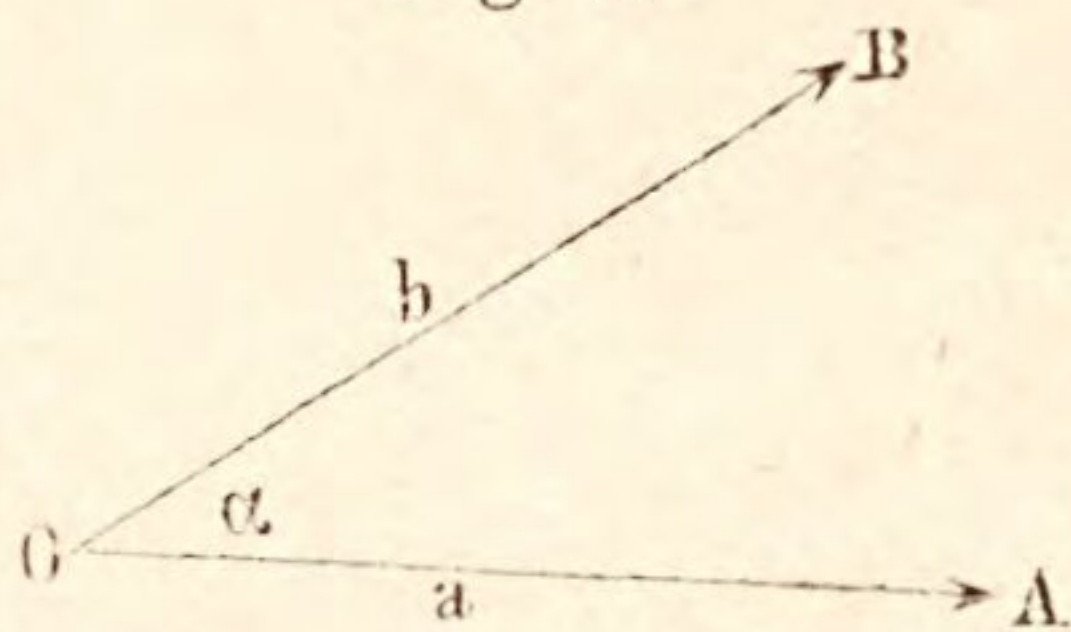
Die Strecke hatte eine doppelte Bedeutung. Sie war erstens das Mass für die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, zweitens ein Theil der Geraden selbst. Man konnte die Grösse dieses Theiles angeben, indem man ihn durch eine Längeneinheit, d. h. durch eine Strecke von bestimmter Grösse, mass; man konnte aber nicht angeben, der wievielte Theil der Geraden eine Strecke sei, weil die Strecke endlich, die Gerade unendlich gross ist. — Ebenso hat nun auch der Winkel eine doppelte Bedeutung. Er ist erstens das Mass für die Drehung einer Strecke in einer Ebene, zweitens, insofern man darunter das von seinen Schenkeln eingeschlossene Ebenenstück versteht, ein Theil der Ebene selbst. Man kann die Grösse dieses Theiles nicht angeben, indem man ihn durch eine Flächeneinheit, d. h. durch eine ebene Figur von bestimmter Grösse, misst,



weil der Winkel, als Ebenenstück betrachtet, unendlich, dagegen die Figur endlich gross ist; man kann aber angeben, der wievielte Theil der Ebene dieses Ebenenstück ist; das Ebenenstück ist nämlich in der Ebene so oft enthalten, als der zugehörige Winkel in einem geschlossenen Winkel (s. u.). Da die Strecke in jeder ihrer beiden Bedeutungen eine endliche Grösse hat, so pflegt man die beiden Bedeutungen nicht durch besondere Ausdrücke zu unterscheiden (als Theil der Geraden kann man sie Geraden-theil nennen). Der Winkel jedoch hat, als Drehungsgrösse betrachtet, endliche, als Theil der Ebene unendliche Grösse (als Theil der Ebene kann man ihn Ebenentheil nennen). Handelt es sich also um die Grösse eines Winkels, so bedeutet das Wort „Winkel“ stets „Drehungsgrösse“; handelt es sich um die Lage eines Winkels, so bedeutet es stets „Ebenen-theil“. Dieser Unterschied ist im Folgenden stets festzuhalten.

Ein Winkel kann bezeichnet werden 1) durch 3 grosse lateinische Buchstaben, von denen einer (der mittelste) an den Scheitel, die beiden andern an beliebige Punkte der beiden Schenkel (an die Endpunkte, wenn die Schenkel Strecken sind) gesetzt werden ( $AOB$ ); 2) durch 2 kleine lateinische Buchstaben, welche die Schenkel bedeuten ( $ab$ ); 3) durch einen kleinen griechischen Buchstaben ( $\alpha$ ). (Fig. 9.)

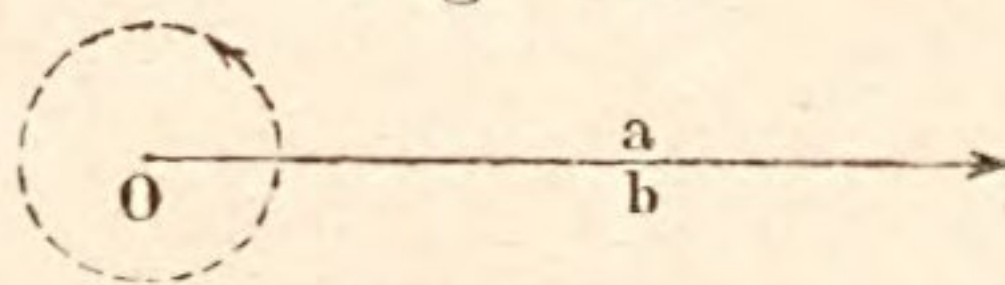
Fig. 9.



**33. Eintheilung der Winkel nach ihrer Grösse.** — Die Grösse einer Drehung, also auch eines Winkels, ist von der Lage des Drehungspunktes und von der Länge der sich drehenden Linie unabhängig.

Bei fortgesetzter Umdrehung um den Punkt O (Fig. 8) muss die Gerade  $a$  allmähig alle durch O möglichen Richtungen annehmen; d. h. alle Richtungen, welche der Punkt O selbst einschlagen könnte, wenn er sich bewegte. Schliesslich muss sie in die ursprüngliche Richtung  $a$  zurückkehren. Die Gerade hat alsdann eine ganze Umdrehung gemacht. Der durch eine ganze Umdrehung einer Geraden entstehende Winkel heisst ein geschlossener Winkel. Die Schenkel eines geschlossenen Winkels haben also gleiche Richtung. (Fig. 10.)

Fig. 10.



Anm. Haben zwei Geraden,  $a$  und  $b$  (Fig. 10) gleiche Lage und gleiche Richtung, so giebt die Zeichnung keine Auskunft darüber, ob und durch wieviele ganze Umdrehungen um O die Gerade  $b$  in ihre gegenwärtige Richtung gekommen ist. Ueberhaupt wird die Zeichnung eines Winkels nicht verändert, wenn man annimmt, dass der eine Schenkel eine beliebige Anzahl ganzer Umdrehungen mehr oder weniger gemacht habe. Man nimmt daher für gewöhnlich an, dass die den Winkel erzeugende Drehung weniger als eine ganze Umdrehung betragen habe; anders ge-



sagt: man betrachtet nur Winkel, die kleiner sind als ein geschlossener.

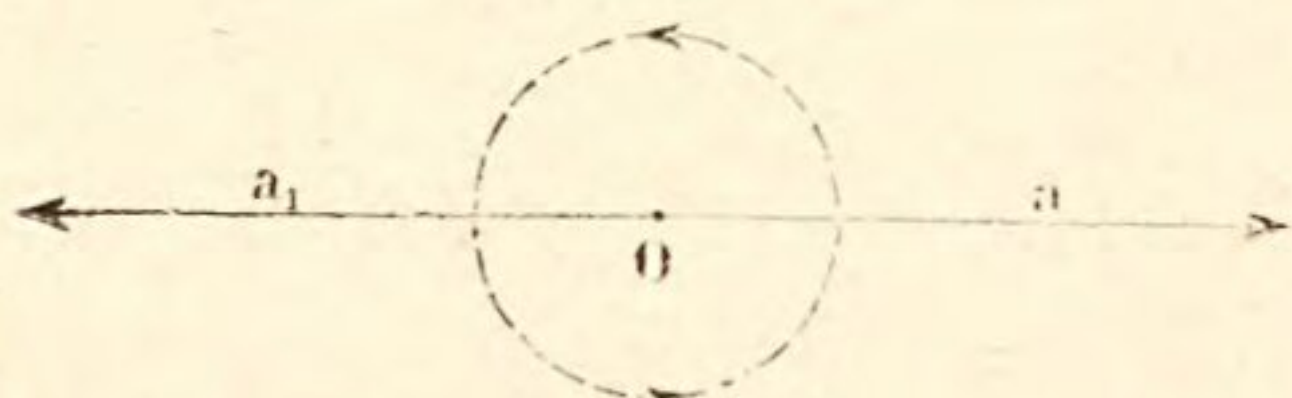
Da alle Winkel, welche durch Drehungen entstanden sind, die sich um ein Vielfaches des geschlossenen Winkels unterscheiden, durch dieselbe Zeichnung ausgedrückt sind (dieselbe Gestalt haben), so ist auch der durch gar keine Drehung entstandene Winkel von der Grösse Null von derselben Gestalt wie der geschlossene Winkel (Fig. 10).

Beispiele für alle diese Bewegungen liefert die Betrachtung der Zeiger einer Uhr. — In welcher Zeit beschreibt der grosse, in welcher der kleine Zeiger einen geschlossenen Winkel? (Aehnliche Fragen sind auch weiter unten zu stellen.)

37. Aus 36 folgt: Alle geschlossenen Winkel sind einander gleich.

Bei ihrer Umdrehung um den Punkt  $O$  muss die Gerade  $a$  einmal auch in die entgegengesetzte Richtung  $a_1$  kommen

Fig. 11.



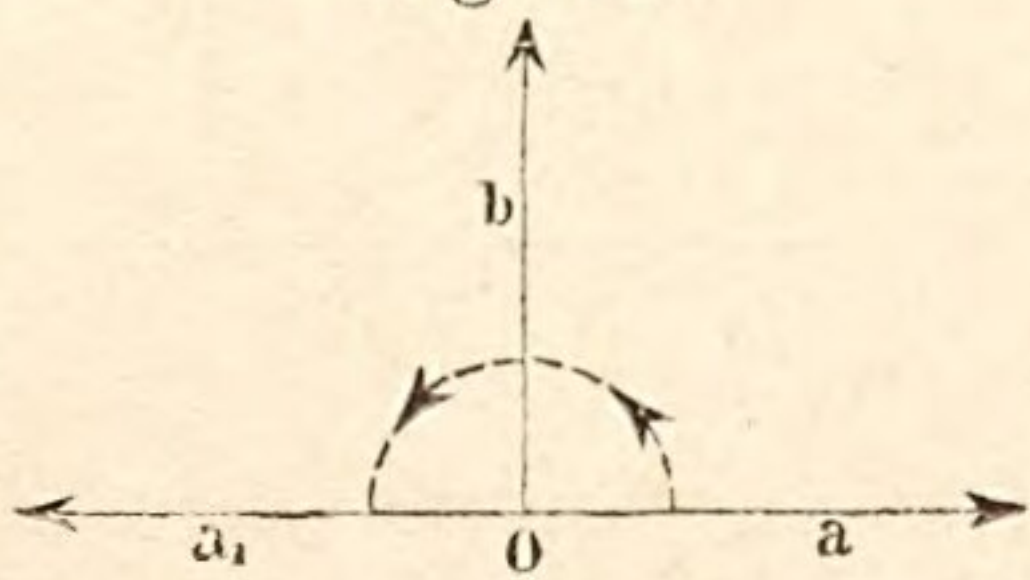
(Fig. 11). Da die Beziehung einer Geraden zu einer Ebene sich nicht ändert, wenn man die Gerade in entgegengesetzter Richtung nimmt, so ist die Drehung, welche  $a$  nach

$a_1$  bringt, eben so gross wie diejenige, welche  $a_1$  nach  $a$  bringt; d. h.: Eine Gerade muss, um in die entgegengesetzte Richtung zu gelangen, eine halbe Umdrehung machen. Der durch eine halbe Umdrehung einer Geraden entstehende Winkel heisst ein gestreckter Winkel. Die Schenkel eines gestreckten Winkels haben also entgegengesetzte Richtung (Fig. 11).

38. Da der gestreckte Winkel die Hälfte eines geschlossenen ist, so folgt aus 37: Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Anm. Winkel, die grösser sind als ein gestreckter (aber kleiner als ein geschlossener), heissen *convex*; solche, die kleiner sind: *concav*. (Man zeichne verschiedene concave und convexe Winkel mit Angabe der Richtungen wie in Fig. 11. Was für Winkel können durch eine Strecke dargestellt werden?)

Fig. 12.



Der Winkel, welcher durch eine viertel Umdrehung entsteht, heisst ein rechter Winkel. Von seinen Schenkeln  $a$  und  $b$  (Fig. 12) sagt man, dass sie zu einander senkrechte Richtung haben. (In Zeichen:  $a \perp b$  oder  $b \perp a$ .)\*)

39. Da der rechte Winkel die Hälfte eines gestreckten ist, so folgt aus 38: Alle rechten Winkel sind einander gleich.

\*) Andere Ausdrucksweisen: Sie stehen auf einander senkrecht, sind normal zu einander.



Anm. Winkel, die grösser sind als ein rechter (aber kleiner als ein gestreckter), heissen stumpf; solche, die kleiner sind: spitz; beide zusammen: schief. (Man zeichne verschiedene spitze und stumpfe Winkel.) Was für Winkel bildet eine sich drehende Gerade der Reihe nach mit ihrer Anfangsrichtung?

Durch einen gegebenen Punkt lässt sich zu einer 40. gegebenen Geraden nur *eine* Senkrechte ziehen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebenen Punkt, und ihre Richtung durch die gegebene Gerade vollkommen bestimmt; also ist die Senkrechte selbst vollkommen bestimmt.

Anm. Man sagt, die Senkrechte werde in einem Punkte auf einer Geraden errichtet, wenn der Punkt auf der Geraden liegt; sie werde von einem Punkte auf eine Gerade gefällt, wenn der Punkt ausserhalb der Geraden liegt.

Ein rechter Winkel wird durch  $R$  bezeichnet. Der  $90^{\text{te}}$  Theil eines rechten Winkels heisst ein Grad ( $1 R = 90^0$ ), der  $60^{\text{te}}$  Theil eines Grades eine Minute ( $1^0 = 60'$ ), der  $60^{\text{te}}$  Theil einer Minute eine Secunde ( $1' = 60''$ ).

**34.\* Darstellung der Drehung durch Multiplication.** — Die Richtung einer Strecke  $a$  bleibt ungeändert, wenn  $a$   $n$  ganze Umdrehungen macht (wo  $n$  eine beliebige ganze positive Zahl ist). Eine Zahl  $a$  bleibt ungeändert, wenn man sie mit  $(+1)^n$  multiplicirt (Th. I, 77, 79). Da, wie oben (Nr. 20 am Ende) gefunden, jede Strecke als Zahl dargestellt werden kann, so bedeutet die Multiplication einer Strecke mit  $(+1)^n$  eine Drehung der Strecke um  $n$  geschlossene Winkel.

Die Richtung einer Strecke  $a$  geht in die entgegengesetzte ( $-a$ , nach 22) über, wenn  $a$  eine halbe Umdrehung macht. Eine Zahl  $a$  verwandelt sich in  $(-a)$ , wenn man sie mit  $(-1)$  multiplicirt. Demnach bedeutet die Multiplication einer Strecke mit  $(-1)$  eine Drehung der Strecke um einen gestreckten Winkel.

Anm. Welche geometrische Bedeutung hat die Formel  $a \cdot (-1)^2 = a$ ?

Sei  $x$  der Factor, welcher einer viertel Umdrehung entspricht. Dann ist (Fig. 12)

$$ax = b; \quad bx = -a (= a_1),$$

also 
$$x = \frac{b}{a}; \quad x = -\frac{a}{b};$$

multiplicirt:

$$x^2 = -\frac{ab}{ab} = -1; \quad x = \sqrt{-1} = i. \quad (\text{Vgl. Th. I, Nr. 102}).$$

Demnach bedeutet die Multiplication einer Strecke mit

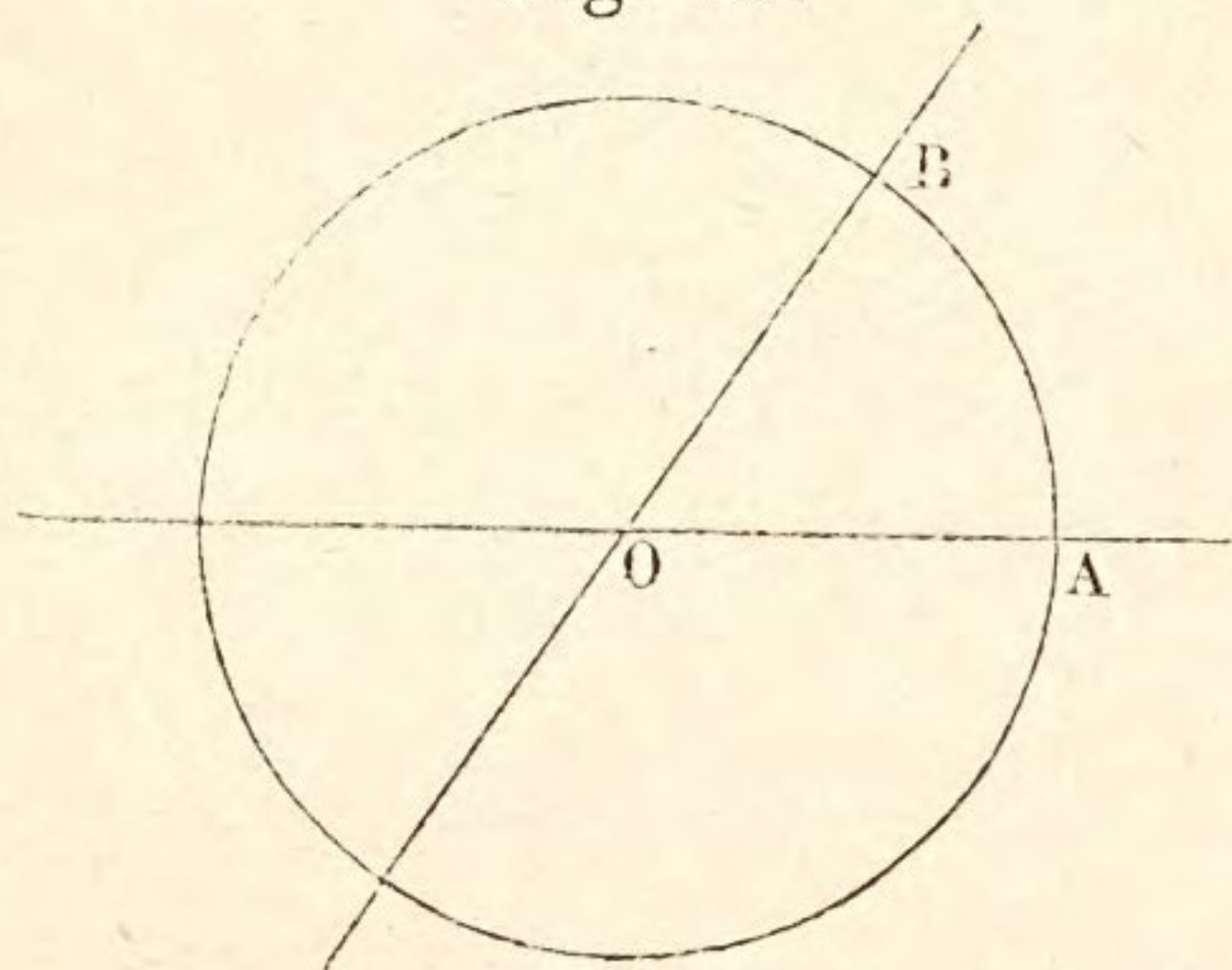


$i$  eine Drehung der Strecke um einen rechten Winkel. Und Multiplication einer Strecke mit  $i^n$  bedeutet Drehung der Strecke um  $n$  rechte Winkel.

Anm. Welches ist hiernach die geometrische Bedeutung der Formeln 118 in Th. I? — Man untersuche die Bedeutung der Factoren  $(+1)^n$  und  $i^n$ , wenn  $n$  ein Bruch ist.

**35. Bewegung eines auf der Geraden liegenden Punktes.** — Dreht eine Gerade sich um einen ihrer Punkte ( $O$ ), so beschreibt jeder ihrer Punkte ( $A$ ) eine krumme Linie, die man

Fig. 13.



Kreislinie nennt, wenn die Gerade eine ganze Umdrehung macht; Kreisbogen, wenn die Drehung diese Grösse nicht erreicht. In Bezug auf diese Linie heisst der Drehungspunkt ( $O$ ) Mittelpunkt (Centrum); die Strecke  $OA$  in jeder ihrer verschiedenen Richtungen Radius; jeder von der Geraden beschriebene Winkel (z. B.  $AOB$ ) Centriwinkel.

Der Mittelpunkt einer Kreislinie ist also derjenige Punkt, dessen Verbindungsstrecken mit beliebigen Punkten der Kreislinie gleich gross sind; Radius jede Strecke, welche einen Punkt der Kreislinie mit dem Mittelpunkte verbindet; Centriwinkel jeder Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Kreises ist (dessen Schenkel also Radien sind).

Anm. Construction der Kreislinie mittelst des Cirkels oder eines in einem Punkte befestigten gespannten Fadens.

Wenn ein Punkt  $A$  der Geraden  $OA$  den Bogen  $\widehat{AB}$  beschreibt, während gleichzeitig die Gerade selbst den Centriwinkel  $AOB$  beschreibt, so sagt man, der Centriwinkel  $AOB$  gehöre zum Bogen  $\widehat{AB}$ .

Anm. Ebenso, wie durch 2 von einem Punkt  $O$  ausgehende Strecken  $OA$  und  $OB$  zwei verschiedene Winkel  $AOB$ , ein concaver und ein convexer, gebildet werden, so entstehen auch durch Annahme zweier Punkte  $A$  und  $B$  auf der Kreislinie zwei verschiedene Bogen  $\widehat{AB}$ , von denen jeder zu einem bestimmten der beiden Centriwinkel gehört. Und zwar liegt jeder Bogen in dem Ebenenstück des zugehörigen Winkels.

Die beiden Bogen  $\widehat{AB}$ , welche zusammen den Umfang der Kreislinie bilden, heissen einander entgegengesetzt.

Da der Bogen durch dieselbe Bewegung entsteht wie der Centriwinkel, so kann er ebenso wie dieser als Mass für die Drehung der Geraden betrachtet werden. Da aber verschie-



dene Punkte der sich drehenden Geraden auch verschiedene Bogen beschreiben, so können zwei Centriwinkel, die mit einander verglichen werden sollen, nur durch solche Bogen ersetzt werden, die von demselben Punkte beschrieben wurden, also derselben Kreislinie angehören.

Hiernach können alle Sätze, welche von Winkeln mit demselben Scheitel gelten, ohne Weiteres auf Bogen derselben Kreislinie übertragen werden, indem man statt der Schenkel Punkte auf derselben Kreislinie, statt der Winkel die Bogen zwischen diesen Punkten setzt.

Anm. So wird z. B. der Winkel, den die von zwei Punkten (*A* u. *B*) der Erdkugel oder der scheinbaren Himmelskugel nach dem Erdmittelpunkte (*O*) gezogenen Strecken bilden, durch den Bogen  $\widehat{AB}$  ersetzt.

Da Bogen und Centriwinkel in gleicher Weise die Drehung einer Geraden messen, so sind die beiden Bogen, welche ein Punkt der Geraden beschreibt, wenn die Gerade zwei Drehungen von gleicher Grösse macht, einander gleich; d. h.:

Zu gleichen Centriwinkeln einer Kreislinie gehören gleiche Bogen (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kreislinie gehört der grössere Bogen (und umgekehrt). 41.

Aus 41 folgt:

Jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gehende Gerade halbirt die Kreislinie. — Zwei solche Linien, die auf einander senkrecht stehen, theilen die Kreislinie in vier gleiche Theile. 42.

Anm. Die Hälfte der Kreislinie heisst Halbkreis(linie), der vierte Theil: Quadrant. Was für Bogen (mit Halbkreis und Quadrant verglichen) gehören zu einem concaven, convexen, spitzen, stumpfen Centriwinkel? Wieviel  $R$  betragen zusammen die beiden zu entgegengesetzten Bogen gehörigen Centriwinkel?

Da man aus einem Punkte einer Ebene mit demselben Radius nur eine Kreislinie beschreiben kann, so ist die Kreislinie durch ihren Radius nach Gestalt und Grösse vollständig bestimmt. Daraus folgt:

Kreislinien mit gleichem Radius sind congruent. 43.

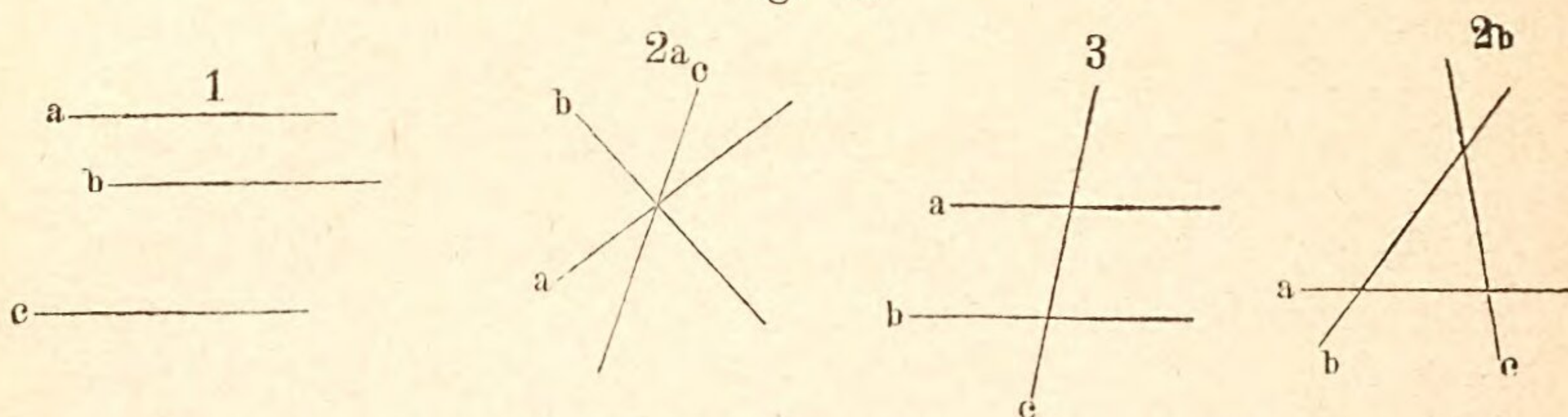
$\beta$ ) Zweimalige Bewegung der Geraden.

**36. Uebersicht.** — Ist eine Gerade *a* durch zwei auf einander folgende Bewegungen erst in *b* und dann in *c* übergegangen, so können die beiden Bewegungen sein: 1) zwei Verschiebungen, 2) zwei Drehungen, 3) eine Verschiebung und



eine Drehung. Im zweiten Falle können die beiden Drehungen entweder 2a) um denselben Punkt oder 2b) um verschiedene Punkte stattfinden (Fig. 14).

Fig. 14.



Man hat alsdann 1) drei Geraden mit gleicher Richtung; 2a) drei Geraden mit derselben Lage; 3) zwei von einer dritten Geraden geschnittene Parallelen; 2b) drei Geraden mit verschiedener Richtung, welche paarweise dieselbe Lage haben (sich in 3 Punkten schneiden).

Anm. In wieviel Theile wird die Ebene in jedem der vier Fälle getheilt? Inwiefern ist 2a) ein specieller Fall von 2b)? — Wieviel Schnittpunkte, Strecken und Figuren entstehen in jedem Falle? — Wie ordnen sich die 4 Fälle nach der Anzahl dieser Schnittpunkte, Strecken und Figuren?

Da der Fall 1) zu keiner besonderen Bemerkung Anlass giebt, so betrachten wir nun der Reihe nach die Fälle 2a), 3), 2b).

### a<sub>1</sub>. Der Winkel und seine Bewegung in der Ebene.

#### 1) Die geometrischen Operationen mit Winkeln.

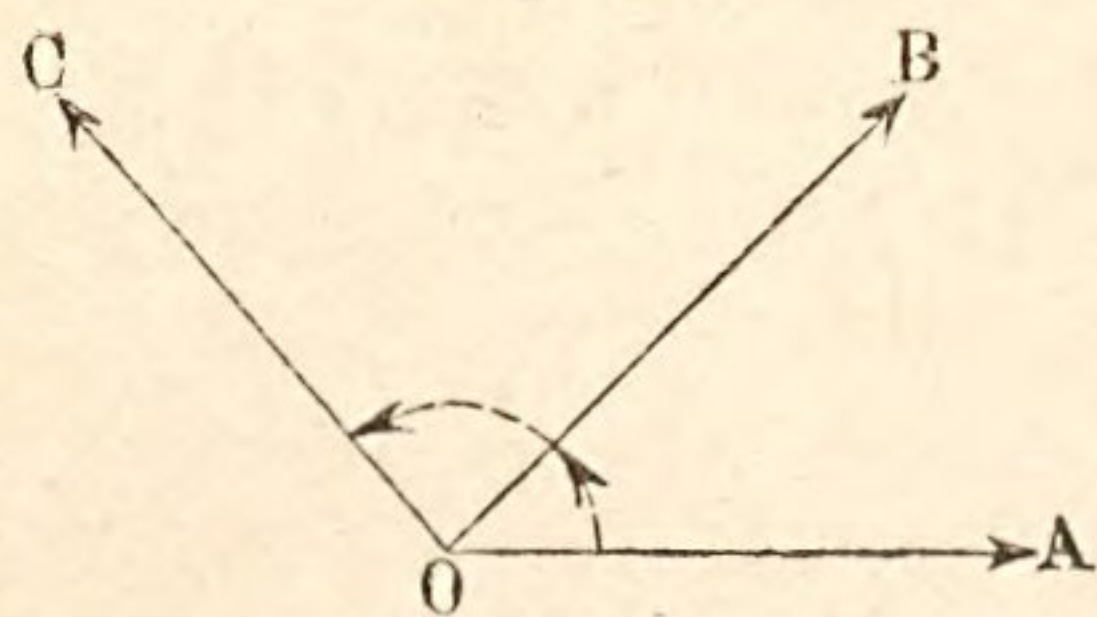
**37. Addition.** — Dreht sich eine Strecke  $OA$  in einer Ebene erst nach  $OB$  und dann weiter nach  $OC$ , so hat sie im Ganzen den Winkel  $AOC$  beschrieben. Da der Winkel  $AOC$  eben so gross ist, als die beiden Winkel  $AOB$  und  $BOC$  zusammengenommen, so kann man  $AOC$  als Summe von  $AOB$  und  $BOC$  betrachten. Demnach ist

$$1) \quad AOB + BOC = AOC.$$

Aus der gegenseitigen Lage der Winkel  $AOB$ ,  $BOC$  und  $AOC$  ergibt sich die Regel:

- 44.** Soll man zwei Winkel addiren, so legt man sie so *an* einander, dass ihre Scheitel und einen Schenkel zusammenfallen. Dann ist ihre Summe der Winkel zwischen ihren anderen Schenkeln.

Fig. 15.





Zwei Winkel, welche so an einander liegen, dass sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, heissen anstossende Winkel.

Anm. Addition mehrerer Winkel durch wiederholte Anwendung von 44. Wie man zwei Winkel in die zum Addiren (und Subtrahiren) erforderliche Lage bringt, wird später gezeigt werden. (Aufgabe 1, Nr. 67.)

**38. Subtraction.** — Aus 1) folgt:

$$2) AOC - BOC = AOB.$$

Demnach ist  $AOB$  die Differenz zwischen  $AOC$  und  $BOC$ , und Fig. 15 liefert die Regel:

Soll man einen Winkel von einem andern subtrahiren, so legt man sie so *auf* einander, dass ihre Scheitel und einen Schenkel zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz der Winkel zwischen ihren andern Schenkeln.

Sind die durch Subtraction zu vereinigenden Winkel einander gleich, so fallen auch ihre zweiten Schenkel zusammen; also:

Legt man zwei gleiche Winkel so auf einander, dass ihre Scheitel und ersten Schenkel zusammenfallen, so fallen auch ihre zweiten Schenkel zusammen.

Umgekehrt ist das Aufeinanderfallen der beiderseitigen Schenkel\*) ein Zeichen für die Gleichheit der Winkel (vorausgesetzt, dass beide concav oder beide convex sind; vergl. Nr. 33); also:

Kann man zwei concave oder zwei convexe Winkel so auf einander legen, dass ihre beiderseitigen Schenkel zusammenfallen, so sind die Winkel gleich.

**39.\* Multiplication.** — Trägt man denselben Winkel ( $\alpha$ )  $n$ -mal hinter einander um einen Punkt  $O$  herum an, so erhält man einen Winkel  $\beta$ , welcher  $n$ -mal so gross ist als der gegebene. Durch diese Construction ist also der gegebene Winkel ( $\alpha$ ) mit der Zahl  $n$  multiplicirt worden, und man hat

$$3) n \cdot \alpha = \beta.$$

*Theilung.* — Aus 3) folgt:

$$4) \frac{\beta}{n} = \alpha.$$

Die in dieser Gleichung enthaltene Aufgabe, einen Winkel  $\beta$

---

\*) Das Zusammenfallen der Scheitel folgt dann von selbst aus 34.



in  $n$  gleiche Theile zu theilen, ist nur in einzelnen, später zu betrachtenden Fällen lösbar. (Aufgabe 3, Nr. 70.)

**40.\* Messung.** — Aus 3) folgt ferner:

$$5) \frac{\beta}{\alpha} = n;$$

48. d. h.: Der Quotient zweier Winkel ist eine Zahl. Der Winkel  $\beta$  wird durch den Winkel  $\alpha$  gemessen, indem man  $\alpha$  so oft als möglich von  $\beta$  abträgt. (Hierbei können dieselben Fälle unterschieden werden, wie bei Messung einer Strecke.)

Setzt man in 5)  $\alpha = 1$ , so wird  $\beta = n$ , d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend einen bestimmten Winkel (z. B. den rechten Winkel)  $= 1$ , so kann man alle Winkel als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in der Trigonometrie.

## 2) Entgegengesetzte Seiten einer Ebene.

**41. Vorbemerkung.** — Ein Punkt hat (Nr. 8) im Anfange seiner Verschiebung die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen; das Unterscheidende dieser Bewegungen nannten wir ihre Richtung. Behielt der Punkt die zuerst gewählte Richtung der Verschiebung bei, so entstand eine Gerade, welche hierdurch das Merkmal einer bestimmten Richtung erhielt. Wir sahen aber später, dass die Gerade eigentlich zwei einander entgegengesetzte Richtungen hat. — Ebenso hat nun auch eine Gerade, die sich um einen ihrer Punkte drehen soll, die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen. Das Unterscheidende dieser Bewegungen nennen wir ihre Seite. Behält die Gerade die zuerst gewählte Seite der Drehung bei (dreht sie sich fortwährend nach derselben Seite), so entsteht eine Ebene, welche hierdurch das Merkmal einer bestimmten Seite erhält.

Anm. Wie durch eine Richtung eine einfach unendliche Menge von Lagen dargestellt ist, so durch eine Seite (im obigen Sinne) eine einfach unendliche Menge von Richtungen und eine zweifach unendliche ( $\infty^2$ ) Menge von Lagen.

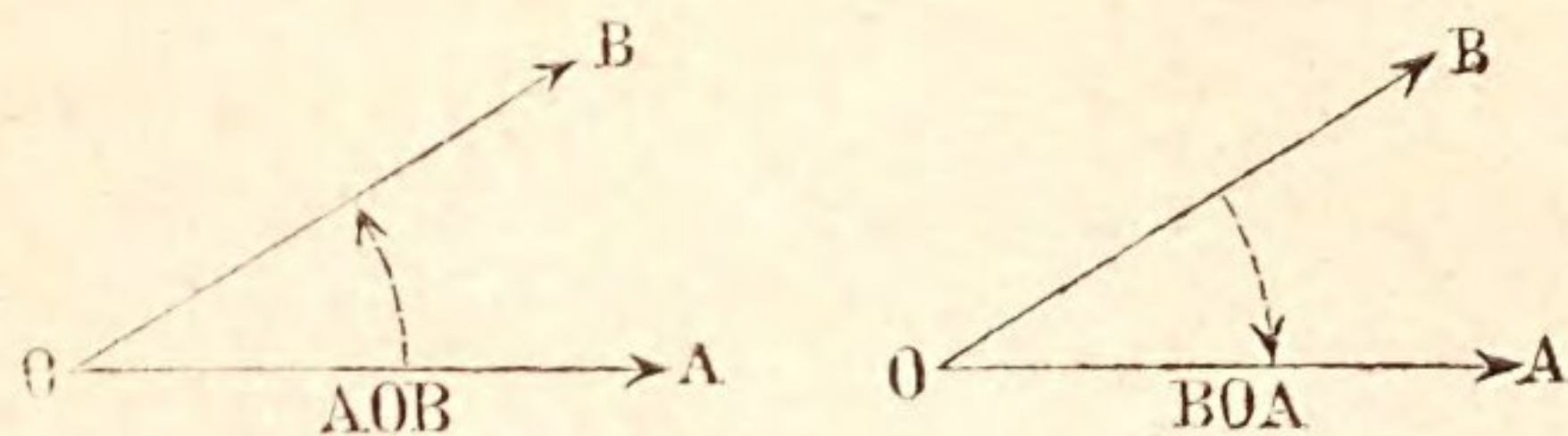
Wir werden nun im Folgenden sehen, dass auch die Ebene zwei einander entgegengesetzte Seiten hat, und dass eine Gerade in einer Ebene sich ebenso nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen kann, wie ein Punkt auf einer Geraden sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen verschieben konnte.

**42. Entgegengesetzte Drehungen.** — Ein Winkel  $AOB$  in einer Ebene kann sowohl durch Drehung der Strecke  $OA$  nach  $OB$ , wie durch Drehung von  $OB$  nach  $OA$  entstehen. Die Sei-



ten dieser beiden Bewegungen heissen einander entgegengesetzt. Die erste Drehung kann über  $OB$ , die zweite über  $OA$  hinaus beliebig fortgesetzt werden.

Fig. 16.



Demnach hat auch jede Ebene zwei entgegen- 49. gesetzte Seiten. Ebenso hat jeder Winkel (als Ebenenstück betrachtet) zwei entgegengesetzte Seiten, die in der Zeichnung (Fig. 16) durch einen Pfeil, in der Benennung durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben unterschieden werden können ( $AOB$  und  $BOA$ ).

Anm. Wie die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden für das Auge in die entgegengesetzte übergeht, wenn man die Gerade in der entgegengesetzten Richtung betrachtet, so geht auch die Drehung einer Geraden in einer Ebene in die entgegengesetzte über, wenn man die Ebene von der entgegengesetzten Seite betrachtet. (Beispiele: ad 1. Bewegung eines Fussgängers auf einer Strasse, der sich, so lange er uns entgegenkommt, uns nähert, und sich, wenn wir ihm nach der Begegnung nachblicken, also die Strasse in entgegengesetzter Richtung betrachten, von uns entfernt; ad 2. Drehung der Flügel einer Windmühle, die für unser Auge nach derselben oder nach entgegengesetzter Seite wie die Drehung des Zeigers der Uhr stattfindet, je nachdem wir auf der einen oder andern Seite der Ebene stehen, in welcher die Flügel liegen.)

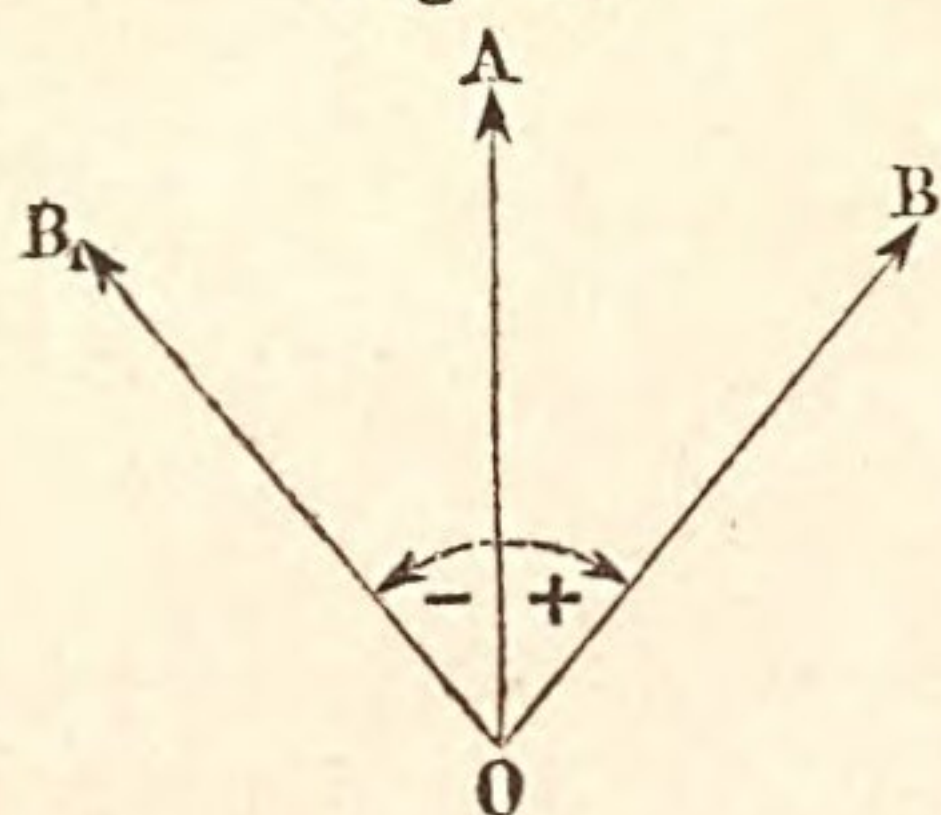
Aus 49 folgt: Jede Gerade in einer Ebene kann sich nach zwei entgegengesetzten Seiten drehen. — In der Ebene kann man an eine Gerade in einem ihrer Punkte einen Winkel nach zwei Seiten hin antragen. — Ueberhaupt kann man von einer Geraden aus in einer Ebene jede Construction auf zwei entgegengesetzte Arten so ausführen, dass die construirten Gebilde gleiche Grösse und Gestalt haben.

Gleiche Constructions von einer (oder verschie- 50. denen) Geraden aus nach entgegengesetzten Seiten einer Ebene geben gleiche aber entgegengesetzte (*symmetrische*) Resultate. (In Fig. 17 z. B. sind die an Grösse gleichen Winkel  $AOB$  und  $AOB_1$  symmetrisch, und die Geraden  $OB$  und  $OB_1$  liegen symmetrisch zu  $OA$ .)

**43.\* Positive und negative Winkel.** — Man kann den Gegensatz zwischen positiven und negativen Zahlen dadurch auf Winkel übertragen, dass man die eine der beiden Seiten einer Ebene, sowie alle durch Drehung nach dieser Seite entstandenen Winkel als positiv, die andere Seite und die durch



Fig. 17.



Drehung nach derselben entstandenen Winkel als negativ betrachtet.

Wird in Fig. 17 die Drehung von  $OA$  nach  $OB$  als positiv betrachtet, so ist  $AOB_1$  negativ, und es ist

$$AOB_1 = -AOB.$$

Da ferner

$$AOB_1 = BOA$$

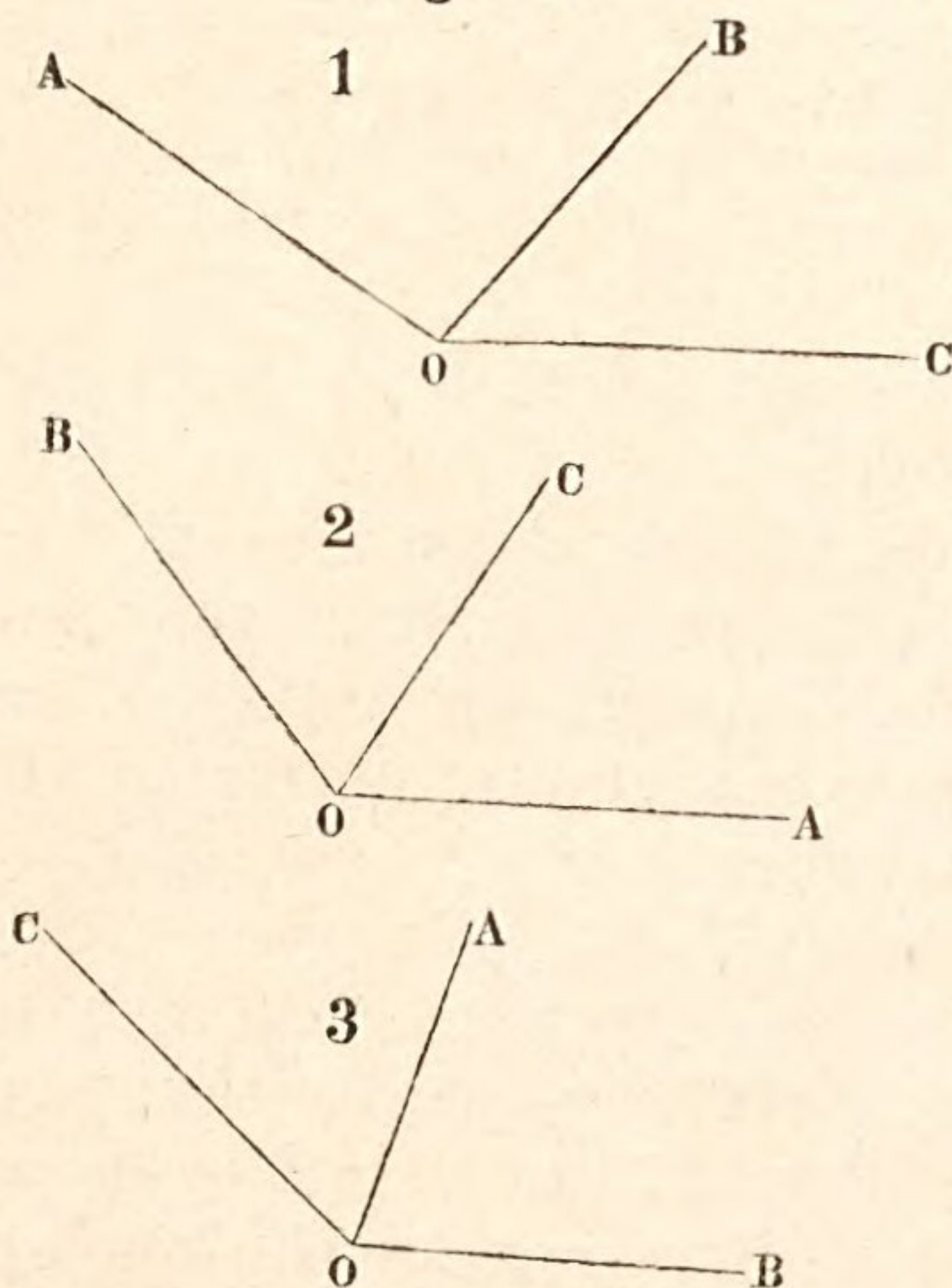
(weil beide Winkel gleich gross und durch Drehung nach derselben Seite entstanden sind), so ist auch

51.  $BOA = -AOB$ , oder  $AOB + BOA = 0$ .

Anm. Die letzte Formel sagt, dass die Drehung von  $OA$  nach  $OB$ , und nach  $OA$  zurück die Richtung der Strecke  $OA$  um den Winkel 0, d. h. gar nicht geändert hat; die vorletzte, dass ein Winkel sein Vorzeichen ändert, wenn man seine beiden Schenkel mit einander vertauscht.

**44.\* Erweiterung.** — Sind in einer Ebene drei von einem Punkt ausgehende Strecken  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  gegeben, so ist (nach 44)

Fig. 18.



1) wenn  $OB$  zwischen  $OA$  und  $OC$  liegt:

$$AOB + BOC = AOC,$$

2) wenn  $OC$  zwischen  $OB$  und  $OA$  liegt:

$$BOC + COA = BOA,$$

oder:

$$BOC - AOC = -AOB \quad (51)$$

oder:

$$AOB + BOC = AOC,$$

3) wenn  $OA$  zwischen  $OC$  und  $OB$  liegt:

$$COA + AOB = COB,$$

oder:

$$-AOC + AOB = -BOC,$$

oder:

$$AOB + BOC = AOC.$$

52. Hieraus folgt: Sind in einer Ebene drei von einem Punkt ausgehende Strecken  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  in beliebiger Richtung gegeben, so ist stets

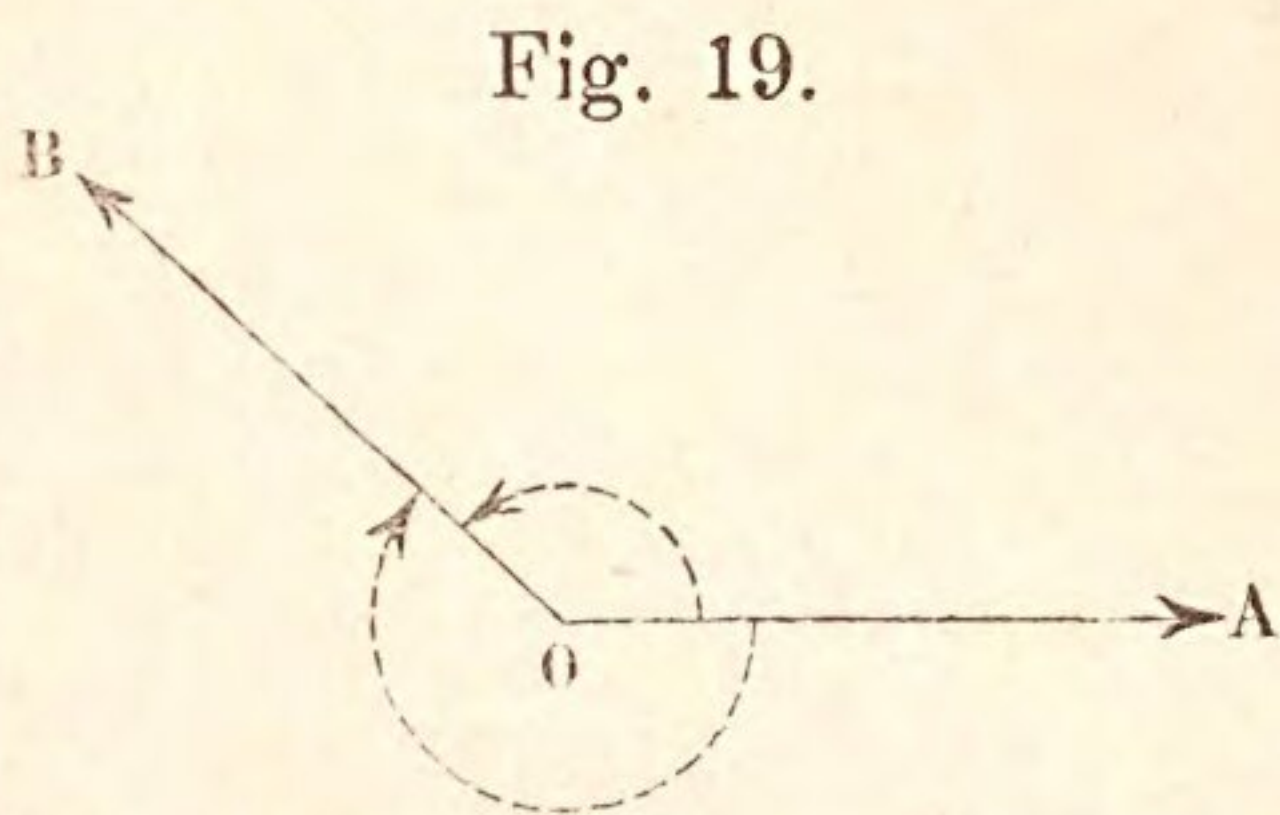
$$AOB + BOC = AOC, \text{ oder: } AOB + BOC + COA = 0.$$

Sind zwei anstossende Winkel (Fig. 17)  $BOA$  und  $AOB_1$  gleich gross, so heisst  $OA$  die Mittelrichtung zwischen den Richtungen  $OB_1$  und  $OB$ . Die Mittelrichtung zwischen zwei



Geraden halbirt also, wenn sie durch ihren Schnittpunkt geht, den Winkel der beiden Geraden, und heisst daher Halbirungslinie des Winkels.

Anm. Gehen von einem Punkte  $O$  zwei Strecken aus,  $OA$  und  $OB$ , so bleibt, auch wenn man den Winkel der beiden Strecken durch  $AOB$  bezeichnet, und dadurch sagt, dass er durch Drehung von  $OA$  nach  $OB$  entstanden sei, noch eine Zweideutigkeit übrig. Es kann nämlich (Fig. 19)  $OA$  sowohl durch Drehung nach der linken, wie durch Drehung nach der



rechten Seite in die Richtung  $OB$  gelangen. Das eine Mal entsteht ein concaver, das andere Mal ein convexer Winkel  $AOB$ . Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, nimmt man für gewöhnlich an, dass die den Winkel erzeugende Drehung weniger als eine halbe Umdrehung betragen habe; anders gesagt: Man versteht unter dem Winkel zweier Strecken, wenn keine andere Bestimmung getroffen ist, den *concaven* Winkel. — Wie der Lagenunterschied zweier Punkte durch ihre gerade Verbindungsstrecke, so wird der Richtungsunterschied zweier Geraden durch den concaven Winkel ihrer Richtungen bestimmt; man kann daher einen concaven Winkel auch als den Richtungsunterschied zweier Geraden erklären.

### 3) Bewegung des Winkels in der Ebene.

**45. Vorbemerkung.** — Ein Winkel kann sich, ohne seine Grösse zu verändern, entweder so bewegen, dass seine Schenkel sich verschieben, oder so, dass sie sich drehen.

Im ersten Falle sind die Schenkel des ersten Winkels paarweise gleichgerichtet mit denen des zweiten, haben also auch denselben Richtungsunterschied wie diese, und man hat den Satz:

Winkel mit paarweise gleichgerichteten Schenkeln sind einander gleich. 53.

Im zweiten Falle können entweder beide Schenkel, oder einer, oder keiner um den Scheitelpunkt des Winkels sich drehen. Diese 3 Fälle sind aber nach 36 nicht wesentlich von einander verschieden; wir betrachten also nur den ersten davon.

**46.\*** Dreht sich ein Winkel  $AOB$  in einer Ebene bis  $A_1OB_1$ , so bleibt der Richtungsunterschied seiner Schenkel ungeändert; d. h.: der eine Schenkel hat sich ebensoweit gedreht als der andere. Ist also

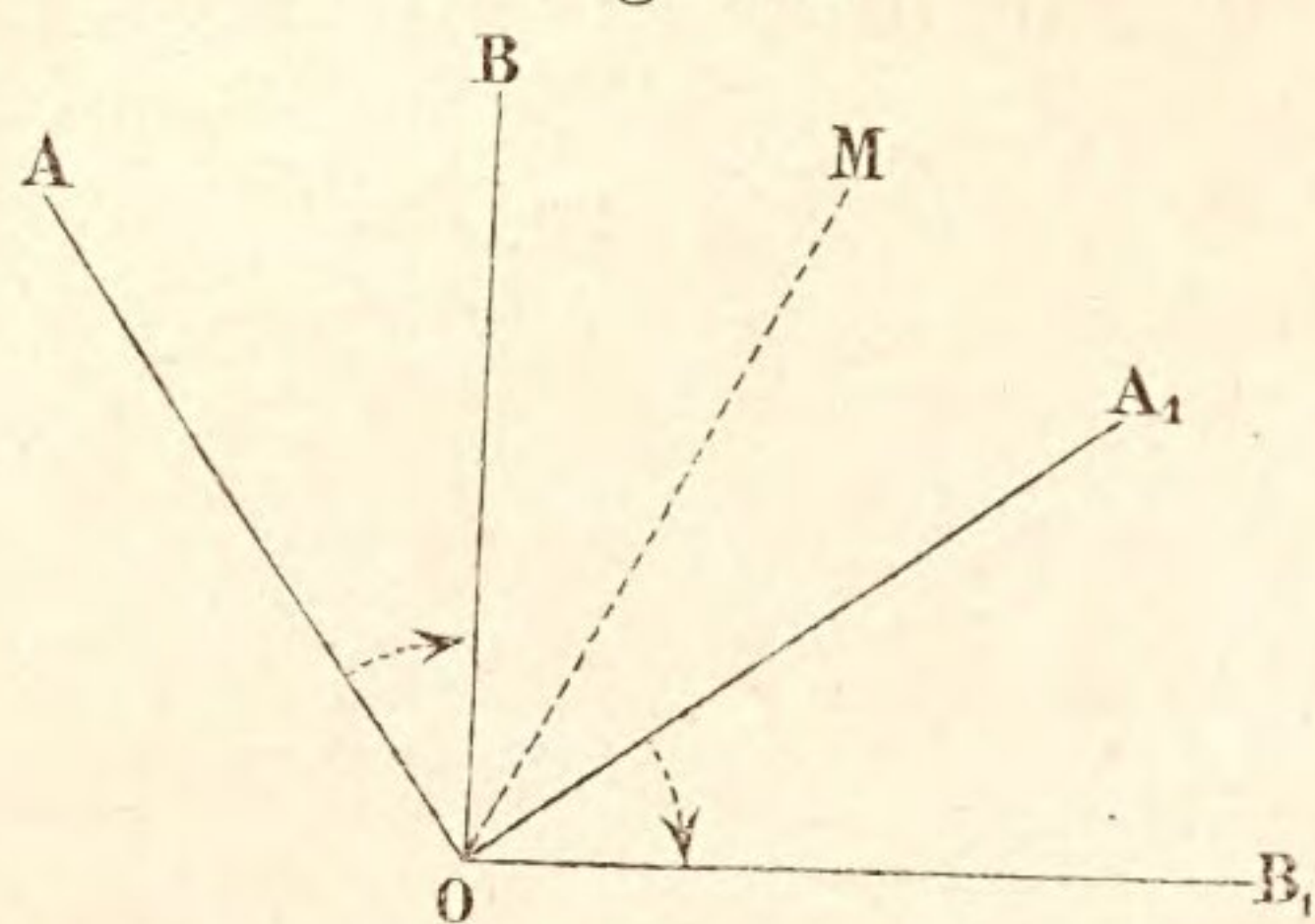
$$1) AOB = A_1OB_1,$$

so ist auch

$$2) AOA_1 = BOB_1$$



Fig. 20.



und umgekehrt. (Dasselbe Resultat folgt, wenn man auf beiden Seiten von 1) den Winkel  $BOA_1$  addirt.)

Ist  $OM$  die Mittelrichtung zwischen  $OB$  und  $OA_1$ , so ist

$$3) BOM = MOA_1;$$

ferner

$$1) AOB = A_1OB_1;$$

folglich durch Addition:

$$4) AOM = MOB_1;$$

d. h.:  $OM$  ist auch die Mittelrichtung zwischen  $OA$  und  $OB_1$ .  
Oder:

54. Sind zwei Winkel in einer Ebene einander gleich, so haben die Winkel zwischen dem Anfangsschenkel des einen und dem Endschenkel des andern dieselbe Mittelrichtung.

Statt den Winkel  $AOB$  nach  $A_1OB_1$  zu bewegen, kann man auch an  $OA_1$  in  $O$  einen mit  $AOB$  gleichen und nach derselben Seite gedrehten Winkel  $A_1OB_1$  antragen. Und allgemein:

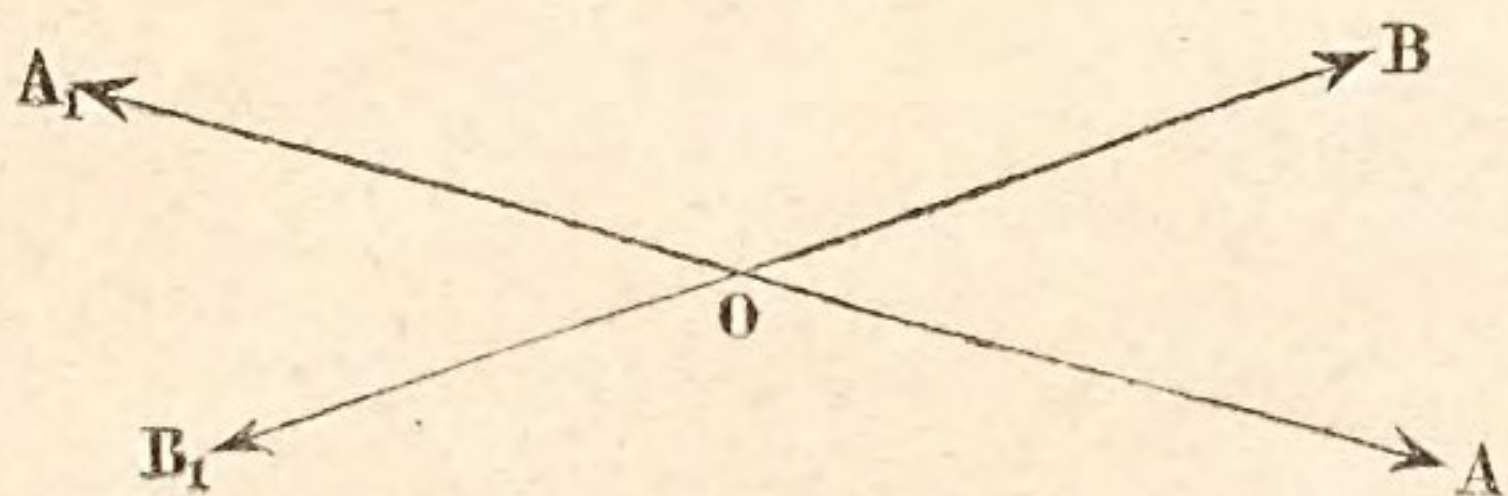
55. Gleiche Constructionen von verschiedenen Geraden aus nach derselben Seite einer Ebene geben gleiche und gleichstimmige (*congruente*) Resultate. (In Fig. 20 z. B. sind die gleichgrossen Winkel  $AOB$  und  $A_1OB_1$  congruent.)

Anm. Diese Betrachtungen lassen sich in ähnlicher Weise erweitern, wie es in Nr. 25 bei Strecken auf einer Geraden geschehen ist.

#### 4) Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

47. *Vorbemerkung.* — Bisher haben wir auf jeder der beiden Geraden ( $a, b$ ), welche einen Winkel bildeten, nur eine Richtung berücksichtigt. Aber auch die entgegengesetzten Richtungen auf  $a$  und  $b$  bilden unter sich und mit den ursprünglichen Richtungen Winkel, sodass im Ganzen überall, wo zwei Geraden sich schneiden, vier concave Winkel entstehen.

Fig. 21.



48. *Nebenwinkel.* — Die Winkel, welche eine Gerade mit den beiden entgegengesetzten Richtungen einer anderen bildet, heissen Nebenwinkel. (Z. B.  $AOB$  und  $A_1OB$ .)



Nebenwinkel sind also solche anstossende Winkel, deren nicht gemeinsame Schenkel entgegengesetzte Richtung haben.

Anm. Wie construirt man zu einem gegebenen Winkel ( $AOB$ ) einen Nebenwinkel? — Wieviele Nebenwinkel kann man zu jedem Winkel construiren? — Wieviel Paare von Nebenwinkeln entstehen, wenn, wie in Fig. 21, zwei Geraden sich schneiden? Wie heissen diese Paare? —

49. *Beziehung zwischen zwei Nebenwinkeln.* — Es ist

$$AOB + BOA_1 = AOA_1 \quad (44).$$

Aber  $AOA_1$  ist ein gestreckter Winkel und als solcher gleich zwei rechten (Nr. 33); also ist, wenn man den rechten Winkel durch  $R$  bezeichnet:

$$AOB + BOA_1 = 2R;$$

d. h.: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 2 rechte. 56.

Anm. Dasselbe Resultat folgt aus der Betrachtung, dass die Strecke  $OA$ , wenn sie sich erst nach  $OB$  und dann nach  $OA_1$  dreht, einerseits nach einander die beiden Winkel  $AOB$  und  $BOA_1$ , andererseits im Ganzen den gestreckten Winkel  $AOA_1$  beschreibt.

Wenn zwei Winkel verschiedene Grösse haben, welcher von ihnen hat dann den grösseren Nebenwinkel? — Wenn zwei Nebenwinkel gleich gross sind, wie gross ist dann jeder von ihnen? — Wie ist der Nebenwinkel eines spitzen, rechten, stumpfen Winkels beschaffen? — Wenn ein Winkel  $n$ mal so gross ist als sein Nebenwinkel, wie gross (in rechten Winkeln ausgedrückt) ist dann jeder von ihnen?

Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel. (Denn 57. sind zwei Summen einander gleich, und ebenso ihre ersten Summanden, so sind auch die zweiten Summanden gleich.)

Die Summe aller Winkel über einer Geraden (d. h. 58. aller auf einer Seite einer Geraden liegenden anstossenden Winkel mit gemeinsamem Scheitel) beträgt 2 rechte. (Folgt aus gleichen Gründen wie 56. Der Satz 58 geht in 56 über, wenn die Anzahl der anstossenden Winkel nur 2 beträgt.)

Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum 59. (d. h. aller anstossenden Winkel mit gemeinsamem Scheitel) beträgt 4 rechte. (Folgt durch Anwendung von 58 auf die zu beiden Seiten einer Geraden liegenden Winkel, oder auch durch Anwendung des Begriffs der Drehung.)

Beträgt die Summe zweier anstossenden Winkel 60. 2 rechte, so sind sie Nebenwinkel. (Denn da alsdann die Summe ein gestreckter Winkel ist, so haben die nicht gemeinsamen Schenkel der beiden Winkel entgegengesetzte Richtung.)

Anm. Im Satze 56 wird von zwei Winkeln vorausgesetzt, 1) dass sie anstossende Winkel sind, 2) dass ihre nicht gemeinsamen Schenkel entgegengesetzte Richtung haben; es wird dann behauptet, dass ihre



Summe 2 rechte beträgt. — Im Satze 60 wird von zwei Winkeln vorausgesetzt, 1) dass sie anstossende Winkel sind, 2) dass ihre Summe 2 rechte beträgt; es wird dann behauptet, dass ihre nicht gemeinsamen Schenkel entgegengesetzte Richtung haben. — Der Satz 60 entsteht also aus 56, indem man eine Voraussetzung mit der Behauptung vertauscht, und heisst daher der Umkehrungssatz (die Umkehrung) von 56.

Jeder eine geometrische Wahrheit enthaltende Satz lässt sich in eine oder mehrere Voraussetzungen und in eine Behauptung zerlegen. Zu jedem Satze lässt sich also auch in der oben angegebenen Weise ein Umkehrungssatz (oder mehrere) aufstellen. Der Umkehrungssatz ist jedoch nur dann ohne weiteres richtig, wenn jede der beiden mit einander vertauschten Aussagen eine nothwendige Folge der andern ist. (Ist dies nur einseitig der Fall, so muss dem Umkehrungssatze noch eine Voraussetzung hinzugefügt werden.) — Unter den früheren Sätzen ist 18 die Umkehrung von 17, 47 die von 46.

Zwei (beliebig liegende) Winkel heissen, wenn sie zusammen zwei rechte betragen, Supplementwinkel, und, wenn sie zusammen einen rechten betragen, Complementwinkel.

Anm. Wann sind Nebenwinkel Supplementwinkel? Wann sind Supplementwinkel Nebenwinkel? Was wissen wir von zwei Winkeln, die zusammen vier rechte betragen? (S. Fig. 19.)

**50. Scheitelwinkel.** — Die beiden Nebenwinkel eines gegebenen Winkels heissen zusammen Scheitelwinkel. (Z. B.  $AOB$  und  $A_1OB_1$ , Fig. 21.)

Der Scheitelwinkel eines Winkels ist also der Winkel, welchen die entgegengesetzten Richtungen der Schenkel des ersten bilden.

Anm. Wie construirt man zu einem gegebenen Winkel ( $AOB$ ) den Scheitelwinkel? — Wieviele Scheitelwinkel kann man zu jedem Winkel construiren? — Wieviele Paare von Scheitelwinkeln entstehen, wenn, wie in Fig. 21, zwei Geraden sich schneiden? Wie heissen diese Paare?

**51. Beziehung zwischen zwei Scheitelwinkeln.** — Es ist

$$AOB = A_1OB_1,$$

weil nach 57 die beiden Nebenwinkel des (sich selbst gleichen) Winkels  $A_1OB$  einander gleich sind. Also:

61. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Anm. Dasselbe Resultat folgt aus der Betrachtung, dass die Winkel  $BOA$  und  $B_1OA_1$  durch ein und dieselbe Drehung (nämlich durch Drehung der Geraden  $B_1B$  nach  $A_1A$ ) entstehen, mithin auch gleiche Drehungsgrössen darstellen müssen. — Umkehrung zu 61: Trägt man zwei congruente Winkel in demselben Punkte an eine Gerade nach entgegengesetzten Seiten an, so bilden ihre nicht auf der Geraden liegenden Schenkel eine gerade Linie. Oder: Dreht sich ein Winkel (um seinen Scheitel) so, dass der eine Schenkel entgegengesetzte Richtung erhält, so erhält auch der andere entgegengesetzte Richtung.

62. Allgemeiner ausgedrückt lautet 61: Zwei Winkel sind einander gleich, wenn die Schenkel des einen zu denen des andern bez. entgegengesetzte Richtung haben.



**$b_1$ . Zwei von einer dritten Geraden geschnittene Parallelen.**

**52. Vorbemerkung.** — Wenn eine Gerade  $b$  erst durch Lagenänderung in  $b_1$  und dann durch Richtungsänderung in  $a$  übergegangen ist, so hat  $a$  verschiedene Richtung mit  $b_1$ , und, weil  $b$  und  $b_1$  gleiche Richtung haben, auch mit  $b$ . Man hat also zwei von einer dritten Geraden ( $a$ ) geschnittene Parallelen ( $b$  und  $b_1$ ). — Unter der Voraussetzung, dass auf jeder der drei Geraden nur eine einzige Richtung gilt, dass also zwei sich schneidende Geraden nur einen Winkel bilden, gelten die

**53. Erklärungen.** 1) Die Winkel, welche zwei Parallelen mit einer dritten Geraden bilden, heissen correspondirende Winkel ( $\alpha, \alpha_1$ ).

Dadurch dass man entweder die schneidende Gerade, oder die Parallelen, oder alle drei Geraden in entgegengesetzter Richtung nimmt, erhält man noch drei Paare correspondirender Winkel, nämlich  $\beta, \beta_1; \delta, \delta_1; \gamma, \gamma_1$ .

Anm. Man suche in der Figur zu jedem Winkel seinen correspondirenden.

2) Ein Winkel und der Scheitelwinkel seines correspondirenden heissen zusammen Wechselwinkel ( $\alpha, \gamma_1$ ).

Durch die oben erwähnte Einführung der entgegengesetzten Richtungen erhält man noch drei Paar Wechselwinkel, nämlich  $\beta, \delta_1; \delta, \beta_1; \gamma, \alpha_1$ .

Anm. Man suche in der Figur zu jedem Winkel seinen Wechselwinkel, anfangs mit Hilfe des correspondirenden, dann direct. — Es ist gleich, ob man den Scheitelwinkel des correspondirenden, oder den correspondirenden des Scheitelwinkels sucht.

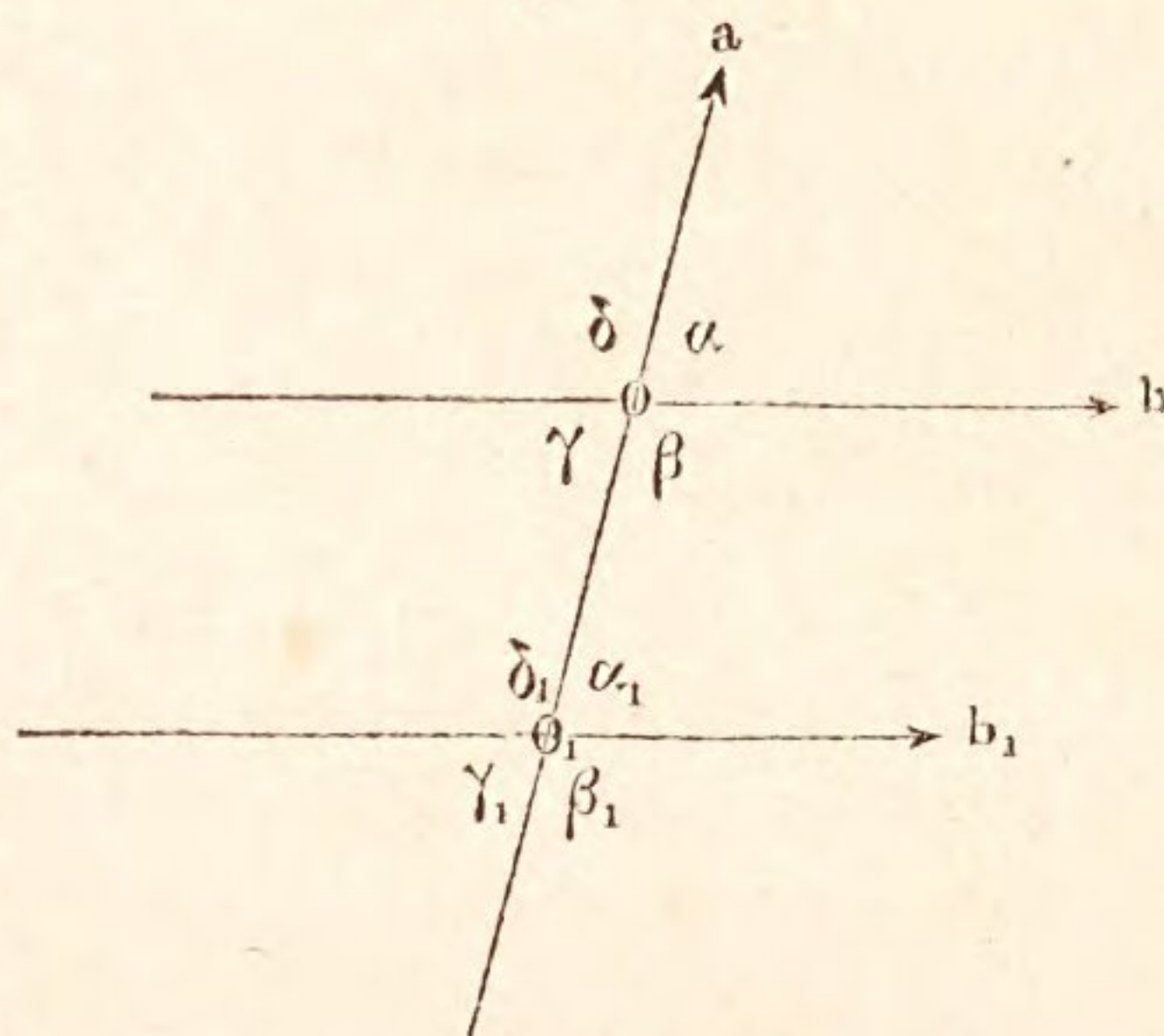
3) Ein Winkel und der diesseitige (auf derselben Seite der schneidenden Geraden  $a$  liegende) Nebenwinkel seines correspondirenden heissen zusammen Gegenwinkel ( $\alpha, \beta_1$ ).

Drei andere Paare von Gegenwinkeln sind  $\beta, \alpha_1; \delta, \gamma_1; \gamma, \delta_1$ .

Anm. Aufsuchung des Gegenwinkels zu einem gegebenen Winkel, wie im Falle 2).

4) Ein Winkel und der jenseitige (auf entgegengesetzter Seite der schneidenden Geraden  $a$  liegende) Ne-

Fig. 22.





benwinkel seines correspondirenden heissen zusammen verschränkte Winkel ( $\alpha, \delta_1$ ).

Drei andere Paare von verschränkten Winkeln sind  $\beta, \gamma_1$ ;  $\delta, \alpha_1$ ;  $\gamma, \beta_1$ .

Anm. Aufsuchung des verschränkten Winkels zu einem gegebenen Winkel, wie im Falle 2). — Vermischte Uebungen dieser und der vorigen Arten. — Angabe des gemeinsamen Namens für zwei in Fig. 22 beliebig gewählte Winkel.

**54. Lagenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen.** — Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten, so können je 2 der entstehenden 8 Winkel folgende Lagen haben: 1) zur schneidenden Geraden: beide auf derselben Seite oder auf entgegengesetzter Seite; 2) zu den Parallelen: beide oberhalb (unterhalb) oder innerhalb (ausserhalb). Welche Lage hiernach die vier Arten der Winkelpaare an Parallelen haben, geht aus der Figur, sowie aus der folgenden Zusammenstellung hervor. Es liegen

zur schneidenden Geraden

|                   |                           |                     |                     |
|-------------------|---------------------------|---------------------|---------------------|
| zu den Parallelen |                           | auf derselben S.    | auf entgegenges. S. |
|                   | oberhalb oder unterhalb   | Correspondirende W. | Verschränkte W.     |
|                   | innerhalb oder ausserhalb | Gegenwinkel         | Wechselwinkel.      |

Anm. Mit Hilfe der Betrachtung der Figur, und dann ohne dieselbe beantworte man folgende Fragen: Welche Lage zur schneidenden Geraden und zu den Parallelen haben (z. B.) correspondirende Winkel? — Wie heissen die Winkel, welche (z. B.) auf derselben Seite der Schneidenden und innerhalb oder ausserhalb der Parallelen liegen? — Welche beiden Arten von Winkeln liegen (z. B.) auf derselben Seite der Schneidenden? — Was haben (z. B.) Gegenwinkel und Wechselwinkel Gemeinsames in ihrer Lage?

**55. Grössenbeziehungen der Winkelpaare an Parallelen.** — Da es für die Grösse der Drehung einer Geraden gleichgiltig ist, um welchen ihrer Punkte die Gerade sich dreht (36), so gelten die (auch unmittelbar einleuchtenden) Sätze:

63. Haben zwei Geraden gleiche Richtung, so haben sie auch gleichen Richtungsunterschied gegen eine dritte.



Haben zwei Geraden gleichen Richtungsunter- 64.  
schied gegen eine dritte, so haben sie auch gleiche  
Richtung.

Anm. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die beiden Drehungen, durch  
welche (Fig. 22)  $a$  in die Richtungen  $b$  und  $b_1$  geräth, nach derselben  
Seite der Ebene hin stattfanden; demnach gilt der zweite der beiden Sätze  
nur im Gebiete der Ebene; der erste dagegen (als dessen Umkehrung man  
den zweiten betrachten kann) gilt allgemein.

Aus 63 folgt:

Zwei correspondirende Winkel sind einander 65.  
gleich.

Zwei Wechselwinkel sind einander gleich. (63 66.  
und 61.)

Zwei Gegenwinkel betragen zusammen  $2 R$ . (63 67.  
und 56.)

Zwei verschränkte Winkel betragen zusammen 68.  
 $2 R$ . (63 und 56.)

Anm. Auf Fig. 22 angewendet, enthält jeder der Sätze 65—68 vier  
Behauptungen, da jede Art von Winkeln in der Figur viermal vorkommt.  
Aus jeder dieser 16 Behauptungen (als Voraussetzung betrachtet) kann  
man mittelst der Sätze 56 und 61 jede der übrigen ableiten. (Uebungen!) —  
In allgemeinerer Ausdrucksweise lauten die Sätze 67 und 68: Zwei Win- 69.  
kel betragen zusammen  $2 R$ , wenn von den Schenkeln des ersten  
der eine gleiche, der andere entgegengesetzte Richtung mit  
einem Schenkel des zweiten hat. — Der allgemeinere Ausdruck für  
65 ist 53, für 66 ist es 62.

Aus 64 folgt:

Werden zwei Geraden von einer dritten so ge- 70.  
schnitten, dass ein Paar correspondirende Winkel  
gleich sind, so sind die Geraden parallel. (Umkeh-  
rung von 65.)

Anm. Da man nach voriger Anm. die Gleichheit zweier correspon-  
dirender Winkel aus jeder der 12 übrigen Voraussetzungen ableiten kann,  
so folgt die Parallelität zweier Geraden auch aus der Gleichheit zweier  
Wechselwinkel, oder aus der Voraussetzung, dass zwei verschränkte oder  
Gegenwinkel zusammen  $2 R$  betragen.

**56. Specieller Fall.** — Ist von den acht Winkeln der Fig. 22  
einer ein rechter, so sind sie alle rechte (nach 56, 61, 65).  
Daraus folgt:

Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen 71.  
senkrecht, so steht sie auch auf der anderen senk-  
recht (65).

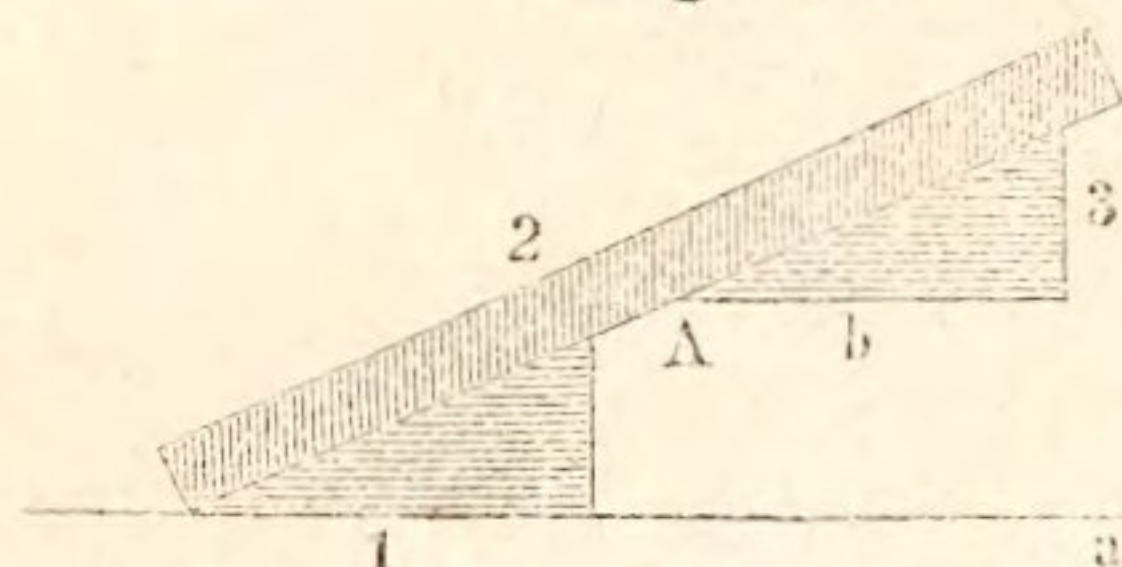
Zwei Geraden, welche auf einer dritten senkrecht 72.  
stehen, sind parallel (70).



57. *Erweiterung.* — Ist 1)  $a \parallel b$ , 2)  $a_1 \perp a$ , 3)  $b_1 \perp b$ , so folgt aus 1) und 2) (nach 71): 4)  $a_1 \perp b$ , und aus 3) und 4) (nach 72):  $a_1 \parallel b_1$ ; d. h.:

73. Die auf jeder von zwei Parallelen errichteten Senkrechten sind selbst parallel.

Fig. 23.



Anm. Vorläufige Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt (A) zu einer gegebenen Geraden (a) die Parallele (b) zu ziehen, mittelst des Lineals und eines rechtwinkligen Dreiecks. — Man lege Dreieck und Lineal in der Stellung 12 zusammen, und schiebe beides an der

Geraden a entlang, bis die untere Kante des Lineals durch A geht (Fig. 23). Dann halte man das Lineal fest und schiebe das Dreieck an demselben entlang, bis seine untere Kante ebenfalls durch A geht (Stellung 3). Die untere Kante b ist dann nach 70 mit a parallel. — Eine nur Lineal und Zirkel erfordernde Lösung folgt später. (Nr. 79, Aufgabe 6.)

58.\* *Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.* — Wenn die Gerade a (Fig. 22) sich um den Punkt O dreht, um in die Richtung b zu gelangen, so rückt ihr Schnittpunkt mit  $b_1$  (der Punkt  $O_1$ ) auf der Geraden  $b_1$  fort (in der Figur nach links) und entfernt sich so immer weiter von seiner ursprünglichen Lage. So lange die Gerade a noch nicht in die mit  $b_1$  parallele Richtung b gelangt ist, existiert dieser Schnittpunkt in endlicher, messbarer Entfernung. Ist aber a in b übergegangen, also mit  $b_1$  parallel geworden, so sagt man, der Schnittpunkt der Geraden a und  $b_1$  sei in unendliche Entfernung gerückt. Statt also zu sagen: zwei Parallelen haben keinen (endlich entfernten) Punkt gemeinsam, kann man auch sagen: sie schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte. — Da zwei Parallelen gleiche Richtung haben, so kann man den unendlich fernen Punkt einer Geraden auch als Vertreter ihrer Richtung ansehen. Und da jede Gerade zwei einander entgegengesetzte Richtungen hat, so ist es gleichgültig, ob man sich den unendlich fernen Schnittpunkt zweier Parallelen durch Verfolgung der einen oder der anderen Richtung auf den Parallelen erreichbar denkt. Es ist also für eine einzige Gerade auch gleichgültig, nach welcher ihrer beiden Richtungen hinausliegend man sich ihren unendlich fernen Punkt vorstellt.

Dreht sich in Fig. 22 die Gerade a, nachdem sie die Richtung b erreicht hat, noch weiter, so kommt ihr Schnittpunkt mit  $b_1$ , welcher vorher nach links in unendliche Ent-



fernung gerückt war, von rechts her aus unendlicher Entfernung wieder zum Vorschein und nähert sich wieder seiner ursprünglichen Lage in  $O_1$ .

Hiernach erscheint die Parallelität zweier Geraden als ein specieller Fall des Schneidens, und man kann mit Hilfe der eben festgestellten Ausdrucksweise sagen, dass zwei Geraden in einer Ebene stets einen Punkt gemeinsam haben, nämlich einen endlich entfernten (oder die Lage), wenn sie sich schneiden, einen unendlich fernen (oder die Richtung), wenn sie parallel sind. — Ebenso erscheint die Verschiebung einer Geraden als specieller Fall der Drehung, nämlich als Drehung um den unendlich fernen Punkt der Geraden.

Anm. Von selbst ist klar, dass man die Verschiebung einer Geraden, bei welcher ihre Richtung ungeändert bleibt, als Drehung von der Grösse Null betrachten kann, dass also zwei Parallelen einen Winkel von der Grösse Null bilden, während zwei sich schneidende Geraden einen Winkel bilden, dessen Grösse, durch ein bestimmtes Mass gemessen, durch irgend eine andere Zahl ausgedrückt werden kann. Da nun die Null eine specielle Zahl ist, so fordert schon die Analogie, dass man zwei Geraden, deren Winkel gleich Null ist, als speciellen Fall von zwei sich schneidenden Geraden betrachte, deren Winkel durch eine andere Zahl ausgedrückt wird. — Diese Anschauungsweise bietet den grossen Vorthail, dass Sätze, welche schneidende Geraden betreffen, sofort ohne Weiteres Sätze über Parallelen liefern, sobald man den Schnittpunkt der Geraden in unendliche Ferne rücken lässt. Der Nachtheil, dass der unendlich ferne Punkt, als Punkt vorgestellt, sich der Anschauung entzieht, fällt weg, sobald man seine Identität mit der Richtung festhält. — Es zeigt sich dann u. a. sogleich, dass die Bestimmung einer Geraden durch Lage und Richtung ein specieller Fall von ihrer Bestimmung durch zwei Punkte ist, dass also das Ziehen einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt ein specieller Fall ist von der Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade u. s. w.

Betrachtet man in Fig. 22 die Entfernungen des Schnittpunktes der Geraden  $a$  und  $b_1$  von seiner Anfangslage  $O_1$  nach links als negative, nach rechts als positive Zahlen, so ändert sich bei der oben beschriebenen Bewegung von  $a$  die Entfernung zwischen dem Schnittpunkte und  $O_1$  von 0 bis  $-\infty$ , springt dann nach  $+\infty$  über (sodass im Falle der Parallelität von  $a$  und  $b_1$  diese Entfernung sowohl durch  $+\infty$  wie durch  $-\infty$  bezeichnet werden kann) und nimmt dann von  $+\infty$  bis 0 ab. Hiernach kann der Uebergang aus dem Positiven ins Negative sowohl durch 0 wie durch  $\infty$  hindurch erfolgen, und es kann  $\infty$  ebenso wie 0 ohne Aenderung des Werthes ebenso wohl positiv wie negativ gedacht werden.

Anm. Die oben beschriebene Bewegung des Schnittpunktes der Geraden  $a$  und  $b_1$  findet sich verwirklicht in der Bewegung, welche das



Bild eines leuchtenden Punktes im sphärischen Spiegel ausführt, wenn der leuchtende Punkt die Axe des Spiegels durchläuft.

Unter allen Punkten einer sich drehenden Geraden ist der Drehungspunkt der einzige, welcher sich nicht bewegt. Die von diesem Punkte beschriebene Kreislinie fällt also mit dem Punkte selbst, der ihr Mittelpunkt ist, zusammen, und da hiernach ihr Radius die Grösse Null hat, so folgt:

74. Ein Punkt kann als Kreislinie mit einem Radius von der Grösse Null betrachtet werden, deren Mittelpunkt mit dem Punkte selbst zusammenfällt.

Wenn eine Gerade ( $a$ ) (ohne in ihrer eigenen Richtung fortzurücken) sich verschiebt, so kann man diese Verschiebung als Drehung um ihren unendlich fernen Punkt betrachten. Jeder Punkt der Geraden  $a$  beschreibt alsdann selbst eine Gerade, welche auf  $a$  senkrecht steht (Nr. 28 u. 33). Daraus folgt:

75. Eine Gerade kann als Kreislinie mit unendlich grossem Radius betrachtet werden, deren Mittelpunkt der unendlich ferne Punkt einer zu der Geraden Senkrechten ist.

### c<sub>1</sub>. Drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden. — Das Dreieck.

**59. Vorbemerkungen.** — Drei Geraden, die sich in drei Punkten schneiden, begrenzen vollständig einen Theil der Ebene, bilden also eine Figur, welche Dreieck heisst. Die zwischen je zwei Punkten liegenden Strecken, welche die Grenzen der Dreiecksfläche bilden, heissen Seiten(linien) des Dreiecks, und an jeder Ecke heisst derjenige Winkel, dessen Schenkel Seiten des Dreiecks sind (der also innerhalb der Dreiecksfläche liegt) Winkel des Dreiecks. Ein Dreieck hat also drei Seiten und drei Winkel. — Jeder Winkel eines Dreiecks hat zwei Nebenwinkel, welche Aussenwinkel des Dreiecks heissen, und einen Scheitelwinkel. Von den 12 Winkeln, welche durch drei sich schneidende Geraden gebildet werden, sind also drei die Winkel, sechs die Aussenwinkel des Dreiecks, und die drei letzten die Scheitelwinkel der ersten. — In Bezug auf eine Seite des Dreiecks heissen die beiden Winkel, deren Scheitel die Endpunkte dieser Seite sind, die der Seite anliegenden Winkel; der dritte heisst der der Seite gegenüberliegende Winkel. — In Bezug auf einen Winkel heissen die beiden Seiten, welche seine Schenkel bilden, die den Winkel einschliessenden Seiten, die dritte heisst die



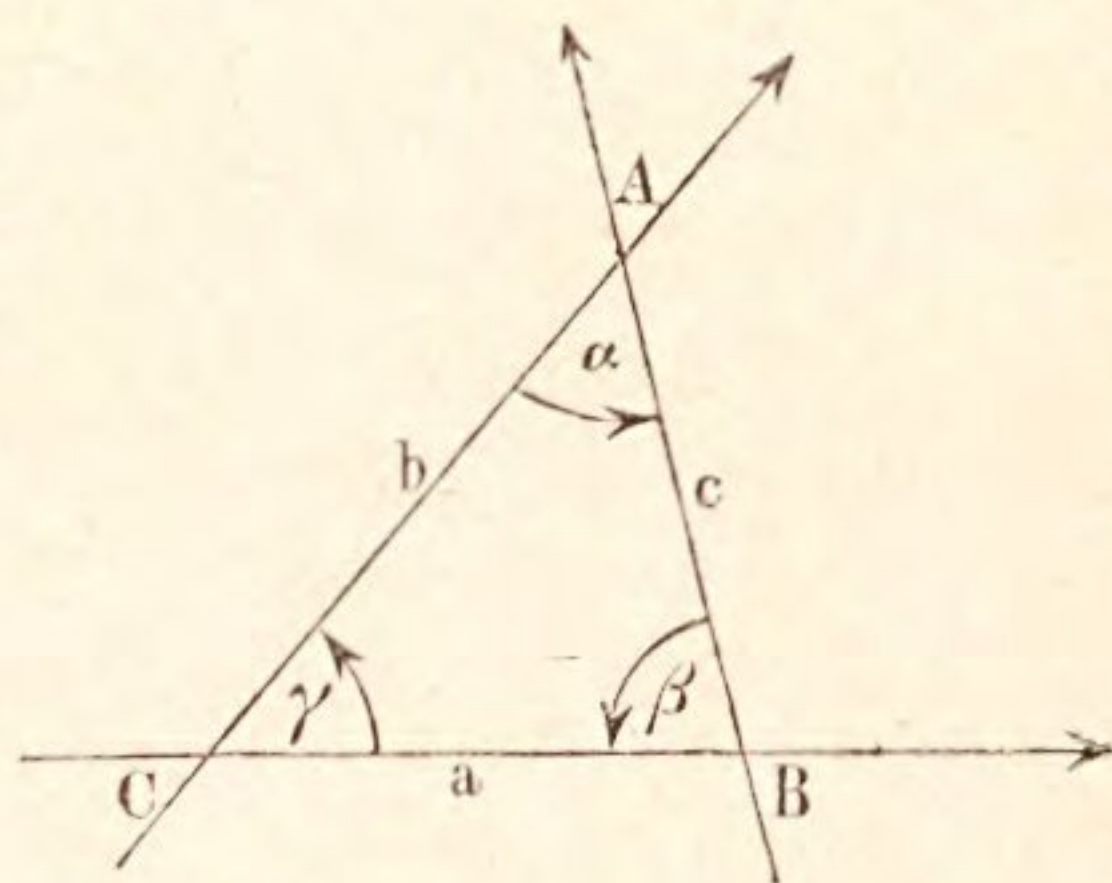
dem Winkel gegenüberliegende Seite. — Es liegen sich also im Dreieck gegenseitig je ein Winkel und eine Seite gegenüber.

Sind  $A, B, C$  die Ecken eines Dreiecks, so bezeichnet man das Dreieck selbst durch  $\overline{ABC}$ .

Anm. Welches sind hiernach die z. B. der Seite  $AB$  anliegenden Winkel, die den Winkel  $ABC$  einschliessenden Seiten? Diese und ähnliche Fragen beantworte man erst mit Hilfe der Figur, dann aus dem Kopfe.

Die Bezeichnung der Seiten eines Dreiecks geschieht auch durch kleine lateinische Buchstaben, sodass jede Seite den der gegenüberliegenden Ecke entsprechenden Buchstaben erhält. Also:  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . — Die Bezeichnung der Winkel eines Dreiecks geschieht ebenso durch kleine griechische Buchstaben. Also:  $BAC = \alpha$ ,  $CBA = \beta$ ,  $ACB = \gamma$ .

Fig. 24a.



### 1) Sinn des Dreiecks.

**60.\*** Wie die Ebene, so kann auch das Dreieck, welches ein Theil derselben ist, von zwei entgegengesetzten Seiten betrachtet werden. — Bewegt sich ein Punkt auf dem Umfange des Dreiecks (Fig. 24) von  $A$  über  $B$  und  $C$  nach  $A$  zurück, so hat er die Fläche des Dreiecks beständig zur Rechten oder beständig zur Linken, je nachdem man das Dreieck von der einen oder der andern Seite der Ebene betrachtet. Man sagt, zwei Dreiecke (Figuren) seien in gleichem oder entgegengesetztem Sinne construirt, je nachdem zwei ihre Umfänge durchlaufenden Punkte die Flächen der Figuren auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite haben.

Denkt man sich das Dreieck (Fig. 24) entstanden durch Drehung der Geraden  $a$  nach  $b$  und dann nach  $c$ , so geht diese Drehung in die entgegengesetzte über, wenn man das Dreieck von der entgegengesetzten Seite der Ebene betrachtet. Man kann also auch sagen, zwei Dreiecke (Figuren) seien in gleichem oder entgegengesetztem Sinne construirt, je nachdem die Winkel des einen nach derselben oder der entgegengesetzten Seite gedreht sind, wie die Winkel des andern.

Anm. Nach 50 und 55 sind also congruente Dreiecke in gleichem, symmetrische in entgegengesetztem Sinne construirt.



## 2) Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks.

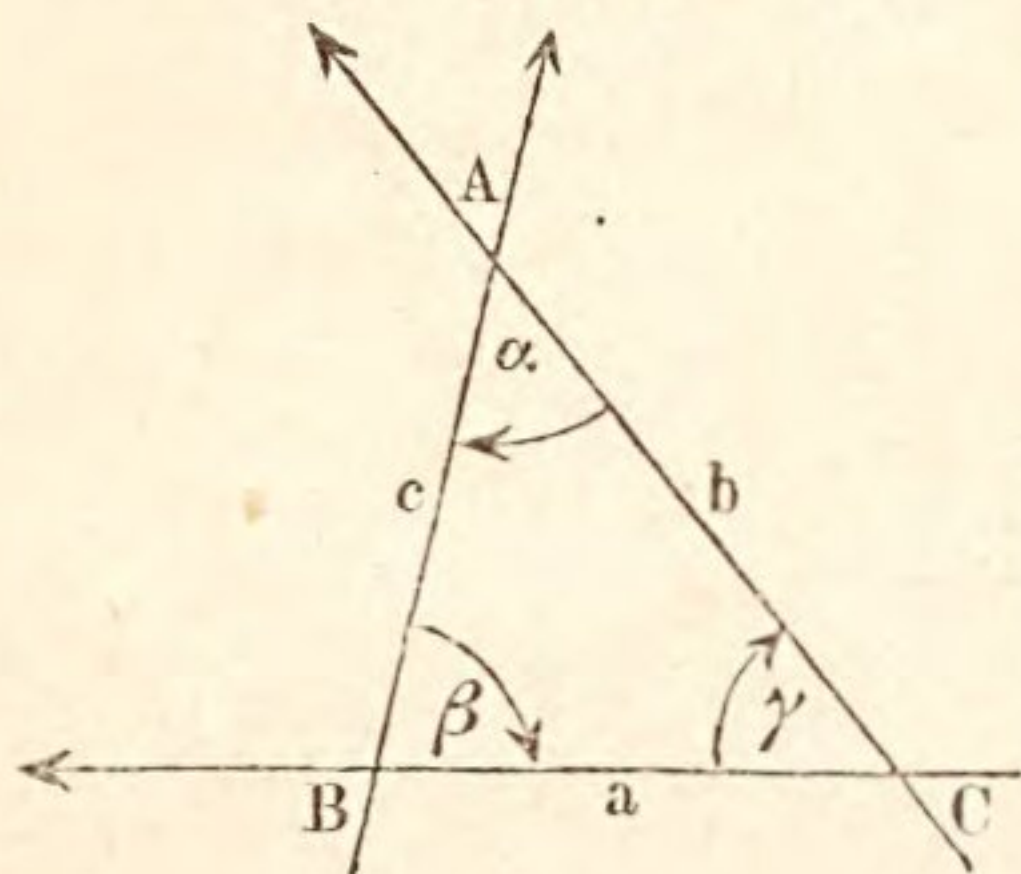
**61. Innere Winkel.** — Dreht sich die Gerade  $a$  um  $C$  nach  $b$ , darauf  $b$  um  $A$  nach  $c$ , so kann  $c$  durch eine Drehung um  $B$  in die zu  $a$  entgegengesetzte Richtung gelangen. Die Grössen dieser drei Drehungen sind dann der Reihe nach durch die Winkel  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ausgedrückt. Also:

$a$  um  $C$  gedreht, beschreibt den Winkel  $\gamma$ ;

$b$  »  $A$  » » » »  $\alpha$ ;

$c$  »  $B$  » » » »  $\beta$ ;

Fig. 24b.



Da  $a$  durch diese drei Drehungen entgegengesetzte Richtung erhält, so hat es im Ganzen einen gestreckten Winkel beschrieben. Und da es für die Grösse der Drehungen gleichgiltig ist, um welchen Punkt die Gerade sich dreht (36), so ist die Summe der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gleich einem gestreckten oder  $2R$ . Man hat also den Satz:

76. Die Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte. —  $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ .

Anm. Anderer Beweis für 76: Die durch  $A$  zu  $BC$  gezogene Parallele bildet mit der Seite  $c$  einen Winkel  $\beta_1 = \beta$  (66) und mit Seite  $b$  einen Winkel  $\gamma_1 = \gamma$  (66). Da nun  $\beta_1 + \alpha + \gamma_1 = 2R$  (58), so ist auch  $\beta + \alpha + \gamma = 2R$ . — Statt  $\gamma_1$  kann man auch seinen Scheitelwinkel benutzen, der nach 65 gleich  $\gamma$  ist.

Aus 76 folgt:

77. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt.
78. Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich, so ist auch der dritte in beiden gleich.

Ein Dreieck kann nicht mehr als einen stumpfen oder einen rechten Winkel enthalten; dagegen kann es drei spitze Winkel enthalten. — Hierauf beruht die Eintheilung der Dreiecke nach der Beschaffenheit ihrer Winkel in stumpfwinklige, rechtwinklige und spitzwinklige. Stumpf- und spitzwinklige Dreiecke führen auch den gemeinsamen Namen schiefwinklige.

Anm. In einem Dreieck sei ein Winkel ein stumpfer, rechter, spitzer; wie gross ist dann (mit  $1R$  verglichen) die Summe der beiden anderen? — In einem Dreieck sei ein Winkel gleich der Summe der beiden anderen; wie gross ist er dann? — Von einem Dreieck, in welchem zwei Winkel einander gleich sind, kennt man 1) den ungleichen Winkel  $\alpha$ ; 2) einen der gleichen Winkel  $\beta$ . Wie findet man die Grösse 1) des gleichen, 2) des



ungleichen Winkels? — In einem Dreieck seien alle drei Winkel einander gleich; wie gross ist jeder?

**62. Aussenwinkel.** — In Fig. 24 kann  $\alpha$  in die Richtung  $c$  auf zwei Wegen gelangen: 1) durch Drehung um  $B$ , wobei der Nebenwinkel von  $\beta$  beschrieben wird; 2) durch zwei Drehungen um  $C$  und  $A$ , wobei die Winkel  $\gamma$  und  $\alpha$  beschrieben werden. — Demnach ist der Nebenwinkel von  $\beta$  (ein Aussenwinkel des Dreiecks) gleich  $\alpha + \gamma$ , und man hat den Satz:

Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich 79. der Summe der beiden an den andern Ecken liegenden Innenwinkel.

Anm. Andere Beweise für 79: Die durch  $B$  zu  $AC$  gezogene Parallele theilt den Aussenwinkel in zwei Theile, deren einer (nach 65) gleich  $\gamma$ , deren anderer (nach 66) gleich  $\alpha$  ist. — Der Winkel  $\beta$  beträgt mit  $\alpha$  und  $\gamma$  zusammen (nach 76), ebenso wie mit dem Aussenwinkel (nach 56)  $2R$ .

Aus 79 folgt:

Ein Aussenwinkel des Dreiecks ist grösser als 80. jeder der an den andern Ecken liegenden Innenwinkel.

**63. Erweiterungen.** — Zieht man in einem Dreieck  $ABC$  (Fig. 25) eine beliebige Gerade  $AD$  aus einer Ecke nach der gegenüberliegenden Seite, so ist nach 80  $ADB > ACB$ . Ebenso, wenn man im Dreieck  $ABD$  die Gerade  $BE$  zieht:  $AEB > ADB$ . Also:

$$AEB > ACB.$$

D. h.: Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit zwei Ecken, so ist der Winkel der Verbindungslinien grösser als der Winkel an der dritten Ecke.

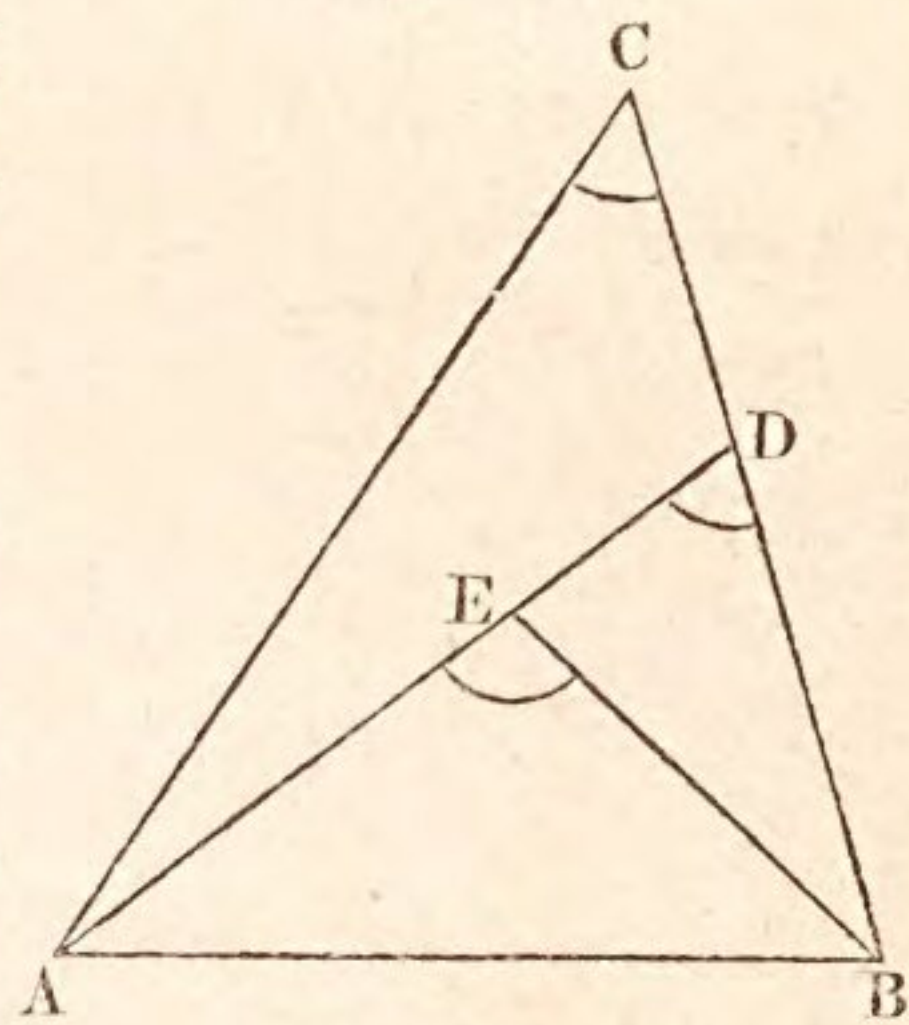


Fig. 25.

81.

Anm. Anderer Beweis für 81: Man ziehe  $CE$ , verlängere bis  $AB$  und benutze 80. — Der Winkel  $ACB$  wird also grösser oder kleiner, je nachdem der Punkt  $C$  in gerader Linie irgend einem Punkte der Strecke  $AB$  sich nähert oder sich von ihm entfernt. Der Winkel  $ACB$  heisst der Gesichtswinkel, unter welchem ein in  $C$  befindliches Auge die Strecke  $AB$  erblickt. Durch die Grösse des Gesichtswinkels wird die scheinbare Grösse eines Gegenstandes bestimmt. Schluss aus der bekannten Grösse eines Gegenstandes auf seine Entfernung, oder aus seiner bekannten Entfernung auf seine Grösse. — In welchen beiden Fällen ist der Gesichtswinkel gleich (oder annähernd gleich) Null? — Augenmass. — Täuschung desselben, wenn Grösse und Entfernung unbekannt ist (Entfernung eines Berges).

**64.** Nimmt eine Gerade nach  $n$  (statt nach 3) Drehungen dieselbe oder entgegengesetzte Richtung an, so erhält man  $n$



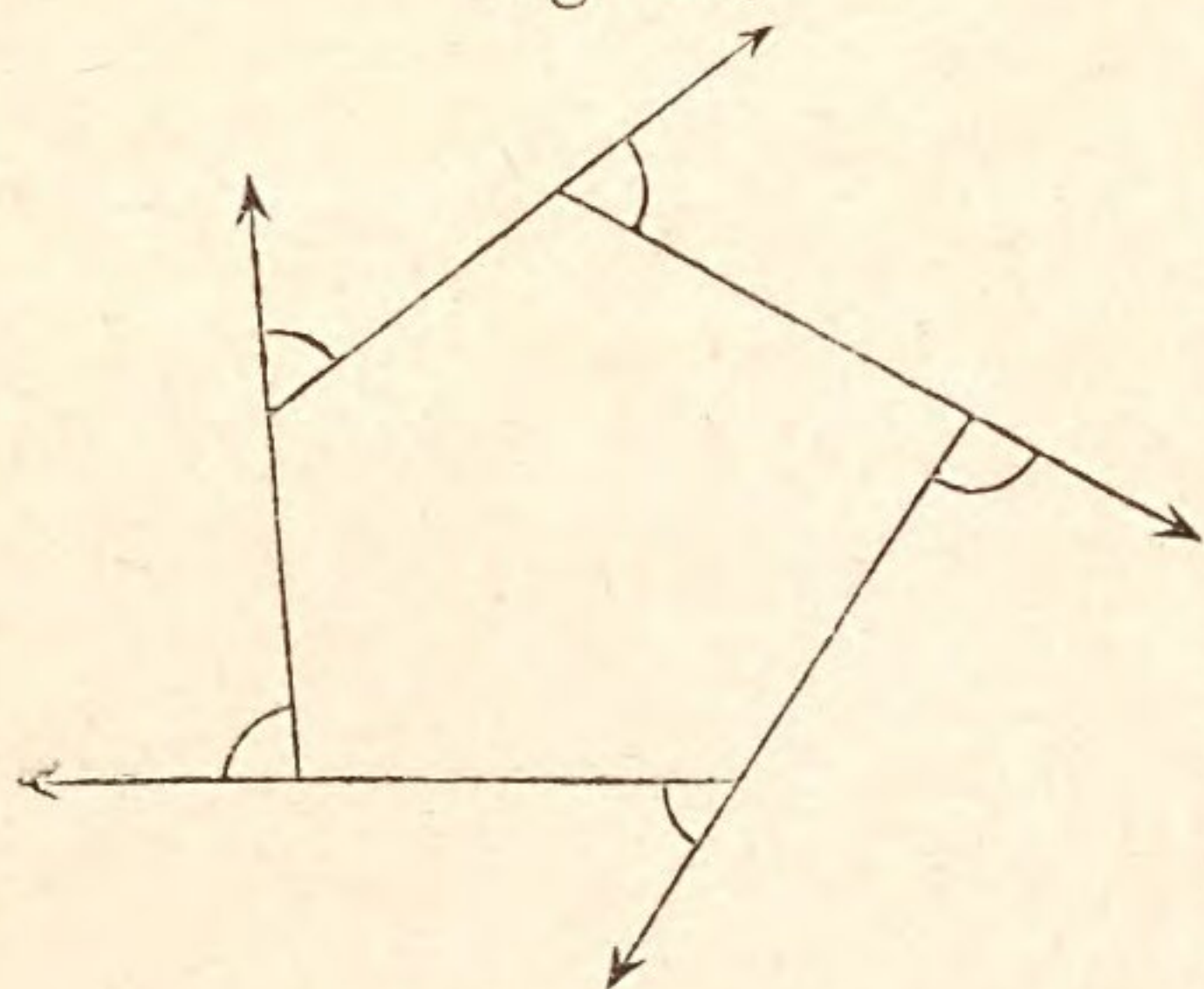
Geraden, die in jeder Aufeinanderfolge eine Figur mit  $n$  Ecken (ein  $n$ -Eck, Vieleck, Polygon) und  $n$  Winkeln bilden.

Da von jeder Ecke zwei Seiten ausgehen, so würde die Zahl der Seiten  $2n$  sein. Da aber je zwei von diesen Seiten zusammenfallen (z. B. die von  $A$  nach  $B$  gehende mit der von  $B$  nach  $A$  gehenden), so beträgt die Zahl der Seiten nur  $n$ . Man hat also den Satz:

82. Jedes Polygon hat ebensoviele Seiten als Winkel und Ecken.

Die Winkelsumme eines Polygons hängt von der Zahl der ganzen Umdrehungen ab, welche die Gerade machen muss.

Fig. 26.



Um ein  $n$ -Eck zu beschreiben, in welchem keine Seite von einer anderen anders als in den Eckpunkten geschnitten wird, braucht die Gerade (Fig. 26) nur eine Umdrehung zu machen. Die Summe der Aussenwinkel eines  $n$ -Ecks beträgt also  $4R$ . Da nun jeder Winkel der Figur mit seinem Aussenwinkel zusammen  $2R$  beträgt (56), so ist die Summe aller Aussen-

und Innenwinkel  $2nR$ , also die Summe der Winkel des  $n$ -Ecks allein  $(2n - 4)R$ . Man erhält also den Satz:

83. Die Winkelsumme eines  $n$ -Ecks, in welchem keine Seite von einer andern geschnitten wird, beträgt  $(2n - 4)R$ . — Speziell:
84. Die Winkelsumme eines Vierecks beträgt  $4R$ !

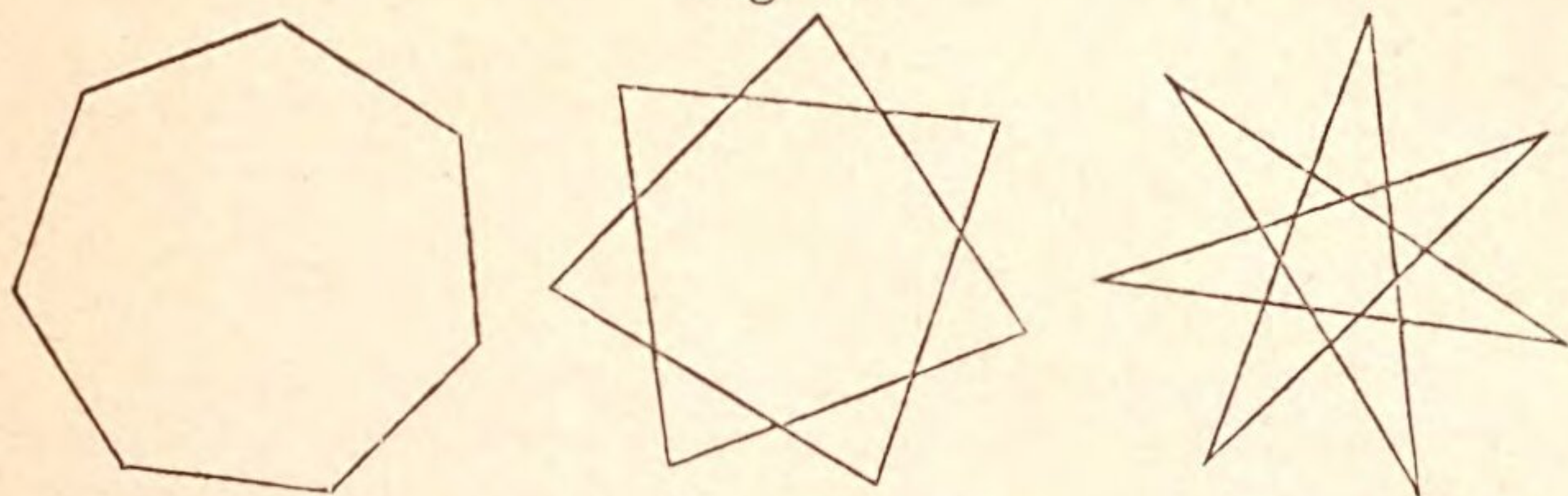
Anm. Andere Beweise für 83: Verbindet man einen Punkt in einem der Aussenwinkel-Räume des  $n$ -Ecks mit allen Ecken, so ist die Winkelsumme des  $n$ -Ecks gleich der Winkelsumme der übrigen  $(n-1)$  Dreiecke, vermindert um die Winkelsumme des von den äussersten Verbindungslinien gebildeten Dreiecks, also gleich  $2(n-1)R - 2R$  oder  $(2n-4)R$ , wie oben gefunden. — Verbindet man einen Punkt im Innern des  $n$ -Ecks mit allen Ecken, und wendet 76 und 59 an, so erhält man dasselbe Resultat.

Erweiterungen:  $n$  Geraden schneiden sich in  $n \cdot^2$  Punkten und bilden  $\frac{(n-1)!}{2}$   $n$ -Ecke. (Hierbei können Punkte zusammenfallen oder in unendliche Entfernung rücken.)  $n$  Punkte können paarweise durch  $n \cdot^2$  Geraden verbunden werden und bilden  $\frac{(n-1)!}{2}$   $n$ -Ecke. (Hierbei können Geraden zusammenfallen oder parallel werden.) — Die Summe der convexen Winkel eines Dreiecks beträgt  $10R$ , eines  $n$ -Ecks  $(2n + 4)R$ .



Man untersuche die Bildungsgesetze und die Winkelsummen der sogenannten Sternfiguren. Als Beispiel zeigt Fig. 27 die drei Stern-Siebenecke. Welche der drei Figuren enthält 2, welche alle 3 Siebenecke?

Fig. 27.



### 3) Bestimmung des Dreiecks durch seine Stücke.

**65. Vorbemerkung.** — Seiten und Winkel eines Dreiecks heissen seine Stücke. Ein Dreieck hat also 6 Stücke. Soll ein Dreieck aus gegebenen Stücken construiert werden, so können sich zunächst nicht alle 3 Winkel darunter befinden; denn nach 77 wäre der dritte Winkel entweder überflüssig oder der Bedingung 76 widersprechend.

**66.** Ist zur Construction des Dreiecks nur ein Stück gegeben, so kann man sich dasselbe in fester Lage denken. Ist es eine Seite, so kann jeder (endlich ferne) Punkt der Ebene (sofern er nicht auf der durch die Seite bestimmten Geraden liegt) die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks sein. Ist es ein Winkel, so kann jede (mit keinem der Schenkel parallele) Gerade der Ebene (sofern sie nicht durch den Scheitel des Winkels geht) die gegenüberliegende Seite des Dreiecks sein.

Sind zur Construction des Dreiecks zwei Stücke gegeben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet,\*) so kann man sich diese Seite in fester Lage denken. Die gegenüberliegende Ecke ist dann aber nicht mehr ein beliebiger Punkt der Ebene, sondern liegt auf einer bestimmten Linie, welche der geometrische Ort dieser Ecke genannt wird.

Anm. Allgemein heisst eine Linie, auf welcher ein mit einer bestimmten Eigenschaft begabter Punkt liegen muss, der geometrische Ort dieses Punktes. So lange der Punkt sich auf dieser Linie bewegt, behält er seine Eigenschaft; sobald er die Linie verlässt, verliert er sie. Sind für einen Punkt zwei geometrische Oerter gegeben, so muss er auf zwei Linien zugleich liegen, d. h. im Schnittpunkte der beiden Linien. (Schneiden sich die beiden Linien in mehreren Punkten, so besitzt jeder dieser

\*) Der Fall, dass 2 Winkel gegeben sind, wird später behandelt (Nr. 110, 1).



85. Punkte die beiden verlangten Eigenschaften.) Ein Punkt ist also im Allgemeinen durch zwei geometrische Oerter vollkommen bestimmt.

Ausser einer Seite ( $a$ ) kann zur Bestimmung des Dreiecks gegeben sein: 1) ein anliegender Winkel ( $\beta$  oder  $\gamma$ ); 2) eine zweite Seite ( $b$  oder  $c$ ); 3) der gegenüberliegende Winkel ( $\alpha$ ). — Es soll zunächst der geometrische Ort der Ecke  $A$  für die beiden ersten Fälle bestimmt werden; der dritte Fall wird später (167) nachgeholt.

1) Ist zu einem Dreieck eine Seite ( $a$ ) und ein anliegender Winkel ( $\beta$ ) gegeben, so muss die der Seite  $a$  gegenüberliegende Ecke  $A$  auf dem zweiten Schenkel des an  $a$  in seinem Endpunkte angetragenen Winkels  $\beta$  liegen. Man hat also den Satz:

86. Ist zu einem Dreieck eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke der zweite Schenkel des an die Seite in ihrem Endpunkte angetragenen Winkels. — ( $a\beta$ )

Anm. Ist die Seite festgelegt, so kann der Winkel auf vier verschiedene Arten angetragen werden.

2) Sind zu einem Dreieck zwei Seiten ( $a, b$ ) gegeben, so muss der eine Endpunkt von  $a$  ( $C$ ) auch Endpunkt von  $b$  sein. Man kennt also die Länge und die Lage der Seite  $b$ , nur nicht ihre Richtung. Der andere Endpunkt von  $b$  ( $A$ ) ist dann die der Seite  $a$  gegenüberliegende Ecke. Dreht sich  $b$  um  $C$ , so beschreibt  $A$  eine Kreislinie. Man hat also den Satz:

87. Sind zu einem Dreieck zwei Seiten gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke die mit der zweiten Seite aus einem Endpunkte der ersten beschriebene Kreislinie. — ( $ab$ )

Sind zur Construction des Dreiecks drei Stücke gegeben, so muss sich unter denselben wenigstens eine Seite befinden (da nicht alle drei Stücke Winkel sein dürfen). Ist diese Seite festgelegt, so sind durch sie 2 Ecken des Dreiecks bestimmt. Zur Bestimmung der dritten Ecke hat man aber zwei geometrische Oerter. Den einen liefert  $a$  in Verbindung mit dem zweiten, den andern wiederum  $a$  in Verbindung mit dem dritten der gegebenen Stücke. Die dritte Ecke ist also ebenfalls vollkommen bestimmt, und dadurch das ganze Dreieck. Man hat also den Satz:

88. Zur Bestimmung eines Dreiecks sind drei seiner Stücke nothwendig und hinreichend.



Aus 50 und 55 folgt nun: Zwei Dreiecke, welche aus 89. denselben drei Stücken in derselben Weise, jedoch an verschiedenen Stellen der Ebene, construirt sind, sind einander congruent oder symmetrisch.

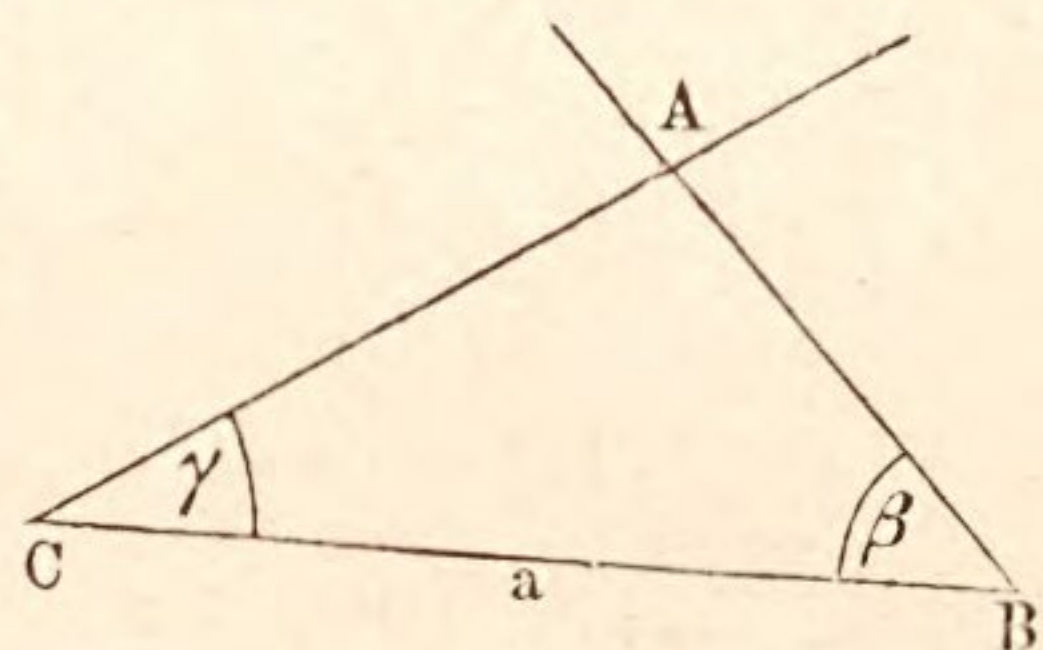
**67. Die einzelnen Fälle der Bestimmung eines Dreiecks durch drei Stücke.** — Von den 6 Stücken des Dreiecks können auf folgende Arten drei zur Bestimmung gewählt werden:

- 1a) Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. ( $a\beta\gamma$ )
- 1b) Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel. ( $a\beta\alpha$ )
- 2) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. ( $ab\gamma$ )
- 3) Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel. ( $ab\beta$ )
- 4) Drei Seiten. ( $abc$ )

Anm. Der Fall 1b) ist von 1a) nicht verschieden, weil, wenn man  $\beta$  und  $\alpha$  kennt, nach 77 auch  $\gamma$  bekannt, also das Dreieck statt durch  $a\beta\alpha$  auch durch  $a\beta\gamma$  bestimmt ist.

**Erster Fall.** Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel ( $a\beta\gamma$ ). — Ist  $a$  festgelegt, so ist nach 86 der erste geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $a\beta$ ) der zweite Schenkel des in  $B$  an  $a$  angetragenen Winkels  $\beta$ . Der zweite geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $a\gamma$ ) ist der zweite Schenkel des in  $C$  an  $a$  angetragenen Winkels  $\gamma$ . Da die beiden geometrischen Oerter sich nur in einem Punkte schneiden (34), so entsteht nur ein Dreieck.

Fig. 28.



Anm. Damit die Schenkel von  $\beta$  und  $\alpha$  sich schneiden, müssen diese Winkel auf derselben Seite von  $a$  angetragen werden. — Vier Constructionen, deren Resultate unter sich theils congruent, theils symmetrisch sind. — Was findet statt, wenn  $\beta + \gamma = 2R$ ?

Aus 89 folgt nun:

**Erster Congruenzsatz:** Zwei Dreiecke sind congruent (oder symmetrisch), wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

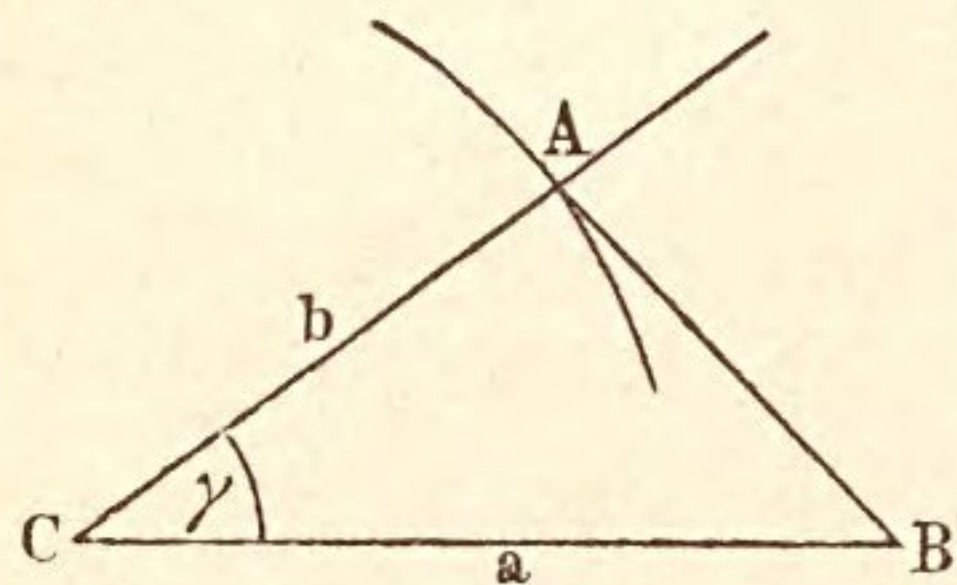
Anm. Anderer Beweis von 90: Wenn die beiden Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{A_1B_1C_1}$  sind, so lege man  $\overline{A_1B_1C_1}$  so auf  $\overline{ABC}$ , dass  $B_1$  auf  $B$  und  $B_1C_1$  in die Richtung  $BC$  fällt. Dann fällt  $C_1$  auf  $C$  (17). Ferner fällt  $B_1A_1$  in die Richtung  $BA$ , und  $C_1A_1$  in die Richtung  $CA$  (46). Folglich fällt  $A_1$  auf  $A$  (34). Die beiden Dreiecke fallen also in eins zusammen.

**Zweiter Fall.** Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel ( $ab\gamma$ ). — Ist  $a$  festgelegt, so ist nach 87 der



erste geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $ab$ ) die aus  $C$  mit  $b$  beschriebene Kreislinie. \*) Der zweite geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $a\gamma$ ) ist der zweite Schenkel des in  $C$  an  $a$  angetragenen Winkels  $\gamma$ . Da die beiden geometrischen Oerter sich nur in einem Punkte schneiden, so entsteht nur ein Dreieck.

Fig. 29.



Anm. Denkt man sich statt der Seite  $a$  den Winkel  $\gamma$  in fester Lage, so hat man, um  $A$  und  $B$  zu erhalten, auf seinen Schenkeln die Strecken  $b$  und  $a$  von  $C$  aus abzutragen. Die gegenüberliegende Seite  $c$  ist dann (nach 14) vollkommen bestimmt.

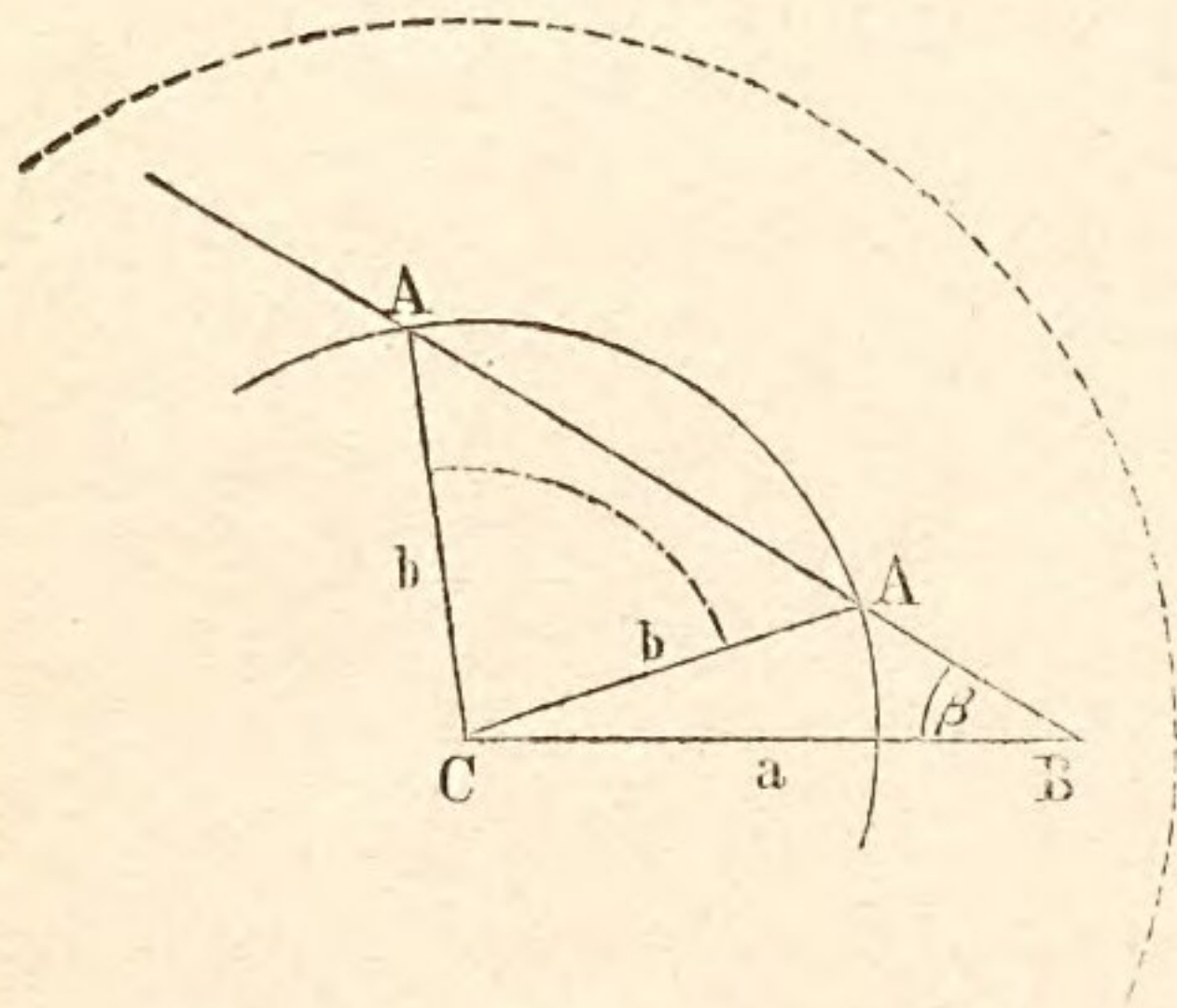
Aus 89 folgt nun:

91. Zweiter Congruenzsatz. Zwei Dreiecke sind congruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Anm. Anderer Beweis von 91: Wenn die beiden Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{A_1B_1C_1}$  sind, so lege man  $\overline{A_1B_1C_1}$  so auf  $\overline{ABC}$ , dass  $B_1$  auf  $B$  und  $B_1C_1$  in die Richtung  $BC$  fällt. Dann fällt  $C_1$  auf  $C$  (17). Ferner fällt  $B_1A_1$  in die Richtung  $BA$  (46), und  $A_1$  auf  $A$  (17). Folglich fällt  $C_1A_1$  auf  $CA$  (14). Die beiden Dreiecke fallen also in eins zusammen.

Dritter Fall. Zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel ( $ab\beta$ ). — Ist  $a$  festgelegt, so ist nach

Fig. 30.



87 der erste geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $ab$ ) die aus  $C$  mit  $b$  beschriebene Kreislinie. Der zweite geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $a\beta$ ) ist der zweite Schenkel des in  $B$  an  $a$  angetragenen Winkels  $\beta$ . Die beiden geometrischen Oerter schneiden sich entweder gar nicht, oder in einem Punkte (wenn  $b > a$ ), oder in zwei Punkten (wenn  $b < a$ ). \*\*)

Das Dreieck ist also nur im zweiten Falle vollkommen bestimmt. Im dritten Falle sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, und es muss zu den drei vorhandenen Bedingungen noch eine vierte treten, damit die Con-

\*) Dieselbe ist in Fig. 29, wie auch später, der Raumersparniss wegen nur theilweise gezeichnet. Für die Ausführung der Constructionen empfiehlt es sich, alle Linien, welche geometrische Oerter bedeuten, punktirt (gestrichelt) zu zeichnen.

\*\*) Die beiden ersten Fälle sind in der Figur durch punktirte Kreislinien angedeutet.



gruenz der Dreiecke für diesen Fall ausgesprochen werden kann. (Vgl. 104.)

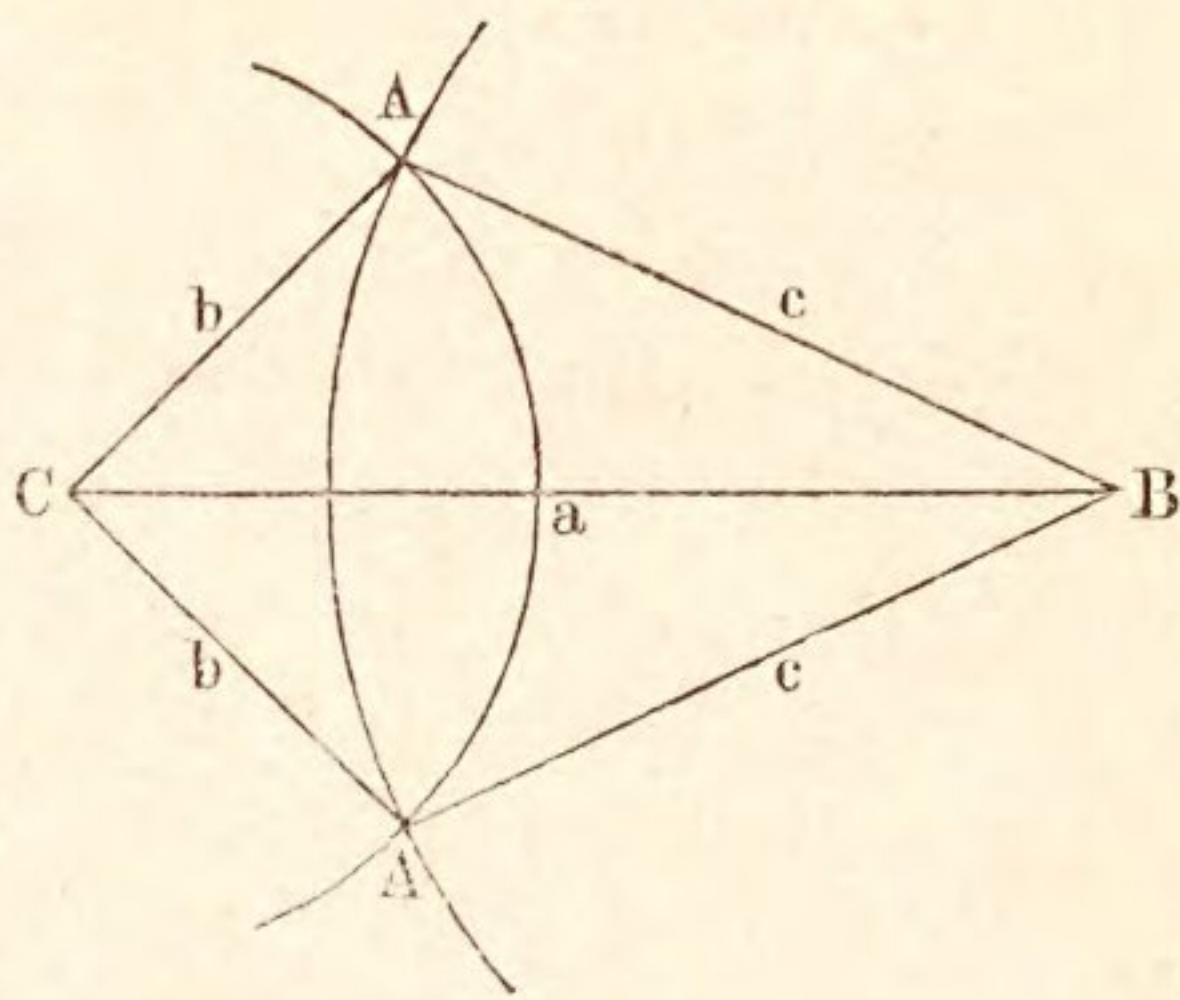
Für den zweiten Fall folgt nun aus 89:

Dritter Congruenzsatz: Zwei Dreiecke sind con- 92.  
gruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten  
und dem der grösseren von ihnen gegenüberliegen-  
den Winkel übereinstimmen.

Anm. Anderer Beweis von 92 folgt in Nr. 69 am Schluss.

Vierter Fall. Drei Seiten ( $abc$ ). — Ist  $a$  festgelegt,  
so ist nach 87 der erste geometrische Ort der Ecke  $A$  (aus  $ab$ )  
die aus  $C$  mit  $b$  beschriebene Kreis-  
linie, und der zweite (aus  $ac$ ) die aus  
 $B$  mit  $c$  beschriebene Kreislinie. Da  
jede der beiden Kreislinien symmetrisch  
zu  $a$  ist (denn die Construction der  
Kreislinie, deren Mittelpunkt auf  $a$   
liegt, ist auf beiden Seiten von  $a$   
dieselbe), so sind auch ihre beiden  
Schnittpunkte ( $A$ ) symmetrisch zu  $a$   
construirt, mithin sind die beiden ent-  
stehenden Dreiecke ( $\overline{ABC}$ ) selbst symmetrisch.

Fig. 31.



Anm. Damit die beiden Kreislinien sich schneiden, muss  $b + c > a$  sein.

Aus 89 folgt nun:

Vierter Congruenzsatz: Zwei Dreiecke sind con- 93.  
gruent (oder symmetrisch), wenn sie in den drei  
Seiten übereinstimmen.

Anm. Anderer Beweis von 93 folgt in Nr. 69 am Schluss. Con-  
struction eines Dreiecks aus drei gegebenen Strecken; dgl. eines  
Dreiecks, welches einem gegebenen Dreieck congruent ist. (Lö-  
sung aus Fig. 31 ersichtlich)

Aus der Uebereinstimmung zweier Figuren in Gestalt und  
Grösse folgt, dass sie vollständig in eine Figur zusammenfallen  
(sich decken), wenn man sie sich an dieselbe Stelle der Ebene  
gebracht denkt. Da in diesem Falle alle Eckpunkte paarweise  
zusammenfallen, so muss dasselbe (nach 14) mit den Seiten,  
und mit den Winkeln stattfinden; d. h. alle Seiten und alle  
Winkel (nach 47) der beiden Figuren müssen paarweise  
gleich sein.

Kann man also die Congruenz zweier Dreiecke aus der  
Gleichheit von drei entsprechenden (homologen) Stücken  
nachweisen, so folgt hieraus die Gleichheit der übrigen homo-  
logon Stücke von selbst, und man hat den Satz:



94. In zwei congruenten (symmetrischen) Dreiecken sind je zwei homologe Stücke einander gleich.

Anm. Man kann hiernach die Gleichheit von Strecken und Winkeln nachweisen, wenn es gelingt, diese Gebilde durch Construction in Dreiecke zu bringen, deren Congruenz man aus der Gleichheit anderer Stücke beweisen kann.

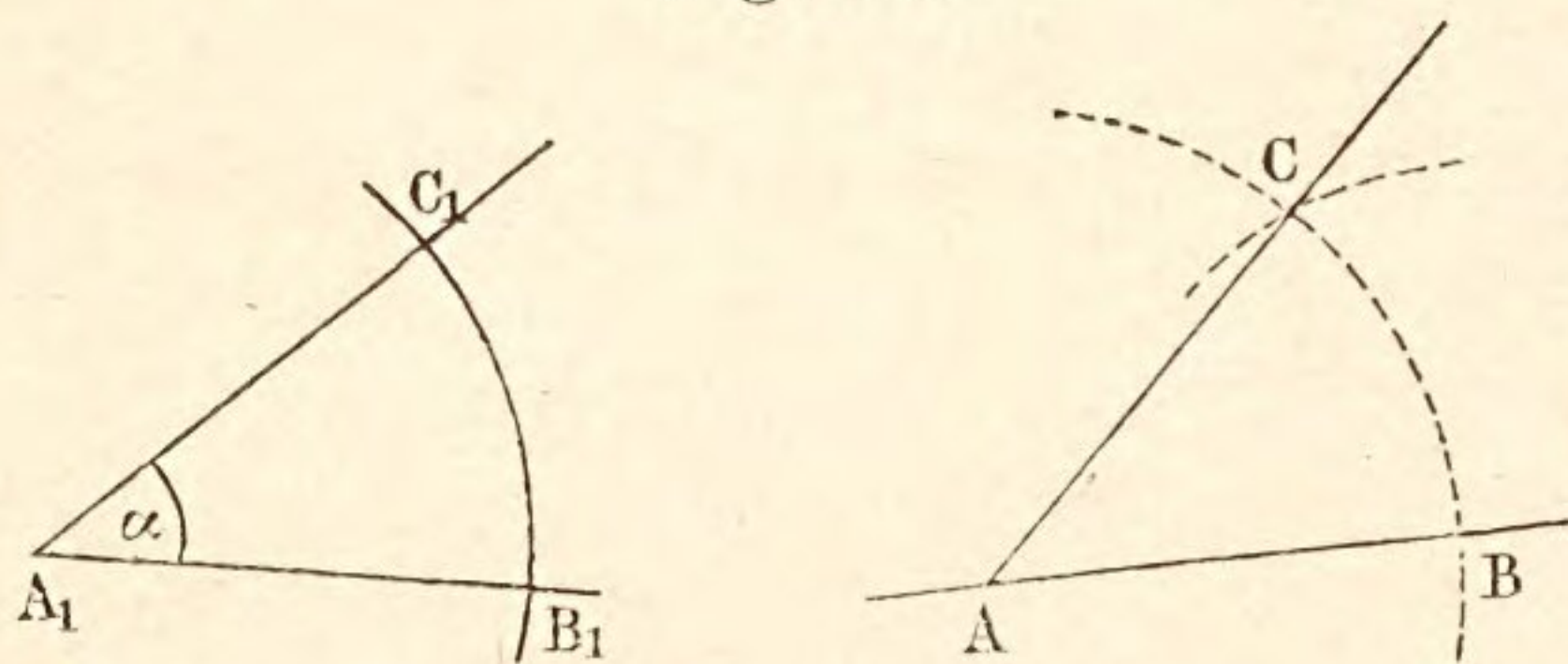
Insbesondere folgt aus 93, dass, wenn zwei Dreiecke in den Seiten übereinstimmen, auch ihre Winkel paarweise gleich sind. — Man kann diesen Umstand benutzen, um die Fundamentalaufgabe zu lösen:

Aufgabe 1. — Einen gegebenen Winkel ( $\alpha$ ) in einem gegebenen Punkte ( $A$ ) einer gegebenen Geraden anzutragen.

Man bringt den Winkel in ein Dreieck, und construirt ein congruentes Dreieck (vgl. Anm. zu 93) so, dass der Scheitel und ein Schenkel des Winkels die geforderten Bedingungen erfüllen.

In kürzester Form lautet die Lösung: Man schneide mittelst des Cirkels vom Scheitel des Winkels aus ( $A_1$ ) beliebige

Fig. 32.



aber gleiche Strecken ( $A_1C_1$  und  $A_1B_1$ ) auf den Schenkeln ab, beschreibe mit derselben Cirkelöffnung eine Kreislinie aus  $A$ , welche die gegebene Gerade in  $B$  schneidet. Dann nehme man die Strecke  $B_1C_1$  in den Cirkel und beschreibe

aus  $B$  eine Kreislinie, welche die erste in  $C$  schneidet. Verbindet man noch  $C$  mit  $A$ , so ist  $CAB = \alpha$ .

Anm. Worin bestehen die Abkürzungen dieses Verfahrens? Auf wie viele Arten kann die Aufgabe gelöst werden? — Construction eines Dreiecks aus  $a\beta\gamma$ ,  $a\beta\alpha$  (man suche erst  $\gamma$ ),  $ab\gamma$ ,  $aba$ . — Construction einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden ( $a$ ) durch einen gegebenen Punkt ( $A$ ) mittelst einer beliebigen durch  $A$  gezogenen Geraden  $b$ . Der Winkel ( $ab$ ) wird in  $A$  an  $b$  als correspondirender Winkel angetragen. (Eine bequemere Lösung dieser Aufgabe folgt in Nr. 79.)

68.\* *Erweiterung.* — Ein  $n$ -Eck hat  $2n$  Stücke, nämlich  $n$  Seiten und  $n$  Winkel (82). Hat man ein  $n$ -Eck bis auf eine Seite ( $AB$ ) construirt, so fehlen ausser dieser Seite noch die beiden anliegenden Winkel. Da man aber zwischen  $A$  und  $B$  nur eine gerade Strecke ziehen kann, so sind diese drei fehlenden Stücke sämtlich durch die übrigen bestimmt, die man zur Construction gebrauchte. Dies giebt den Satz:



Ein  $n$ -Eck ist durch  $2n-3$  seiner Stücke bestimmt. 95.

Anm. Durch wieviel Stücke ist ein Viereck bestimmt? Von welcher Art können die drei nicht gegebenen Stücke eines  $n$ -Ecks sein?

4) Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks.

**69. Das gleichschenklige Dreieck.** — Trägt man an eine Strecke  $BC$  nach beiden Seiten in ihrem einen Endpunkte  $B$  einen Winkel  $\beta$ , im andern Endpunkte  $C$  einen Winkel  $\gamma$  an, so erhält man zwei symmetrische Dreiecke (90)  $ABC$  und  $A_1BC$ . In diesen ist nach Construction:

$BC=BC$ ,  $ABC=A_1BC$ ,  $ACB=A_1CB$ ,  
und nach 94:

$AB=A_1B$ ,  $AC=A_1C$ ,  $BAC=BA_1C$ .

Ist der Winkel  $\gamma$  ein rechter, (Fig. 34) so sind die anstossenden Winkel  $ACB$  und  $A_1CB$  Nebeneinanderwinkel (60); d. h.: die Punkte  $ACA_1$  liegen in gerader Linie, und das Viereck  $ABA_1C$  geht in ein Dreieck  $ABA_1$  über, in welchem  $AB=A_1B$  ist.

Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heisst gleichschenklige. Die gleichen Seiten ( $AB$  und  $A_1B$ ) heissen Schenkel, die ungleiche Seite ( $AA_1$ ) die Basis des Dreiecks. Die der Basis gegenüberliegende Ecke ( $B$ ) heisst Spitze des Dreiecks. Der von den Schenkeln eingeschlossene Winkel ( $ABA_1$ ) heisst Winkel an der Spitze, die an der Basis liegenden Winkel ( $BAA_1$  und  $BA_1A$ ): Winkel an der Basis.

Ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten einander gleich sind, heisst gleichseitig. — Hiernach kann man die Dreiecke nach der Beschaffenheit ihrer Seiten eintheilen in ungleichseitige, gleichschenklige, gleichseitige.

Anm. Da jede der letzten beiden Arten ein specieller Fall der vorhergehenden ist, so gelten alle für ein ungleichseitiges Dreieck abgeleiteten Sätze von selbst für das gleichschenklige, und alle Sätze vom gleichschenkligen Dreieck für das gleichseitige. — Das gleichseitige Dreieck kann in dreifacher Weise als gleichschenkliges betrachtet werden. — Wie vereinfachen sich die Congruenzsätze für rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke?

Fig. 33.

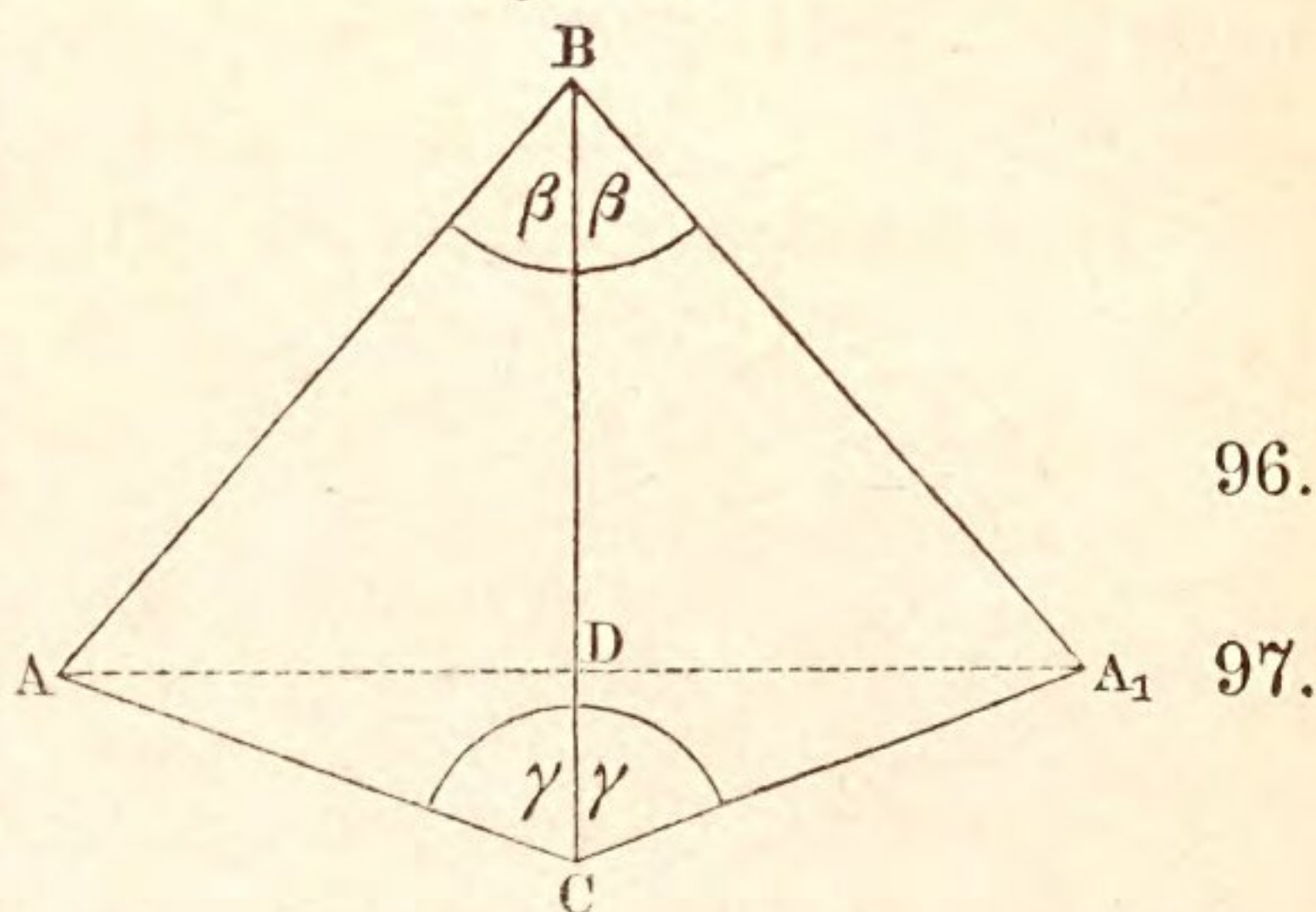
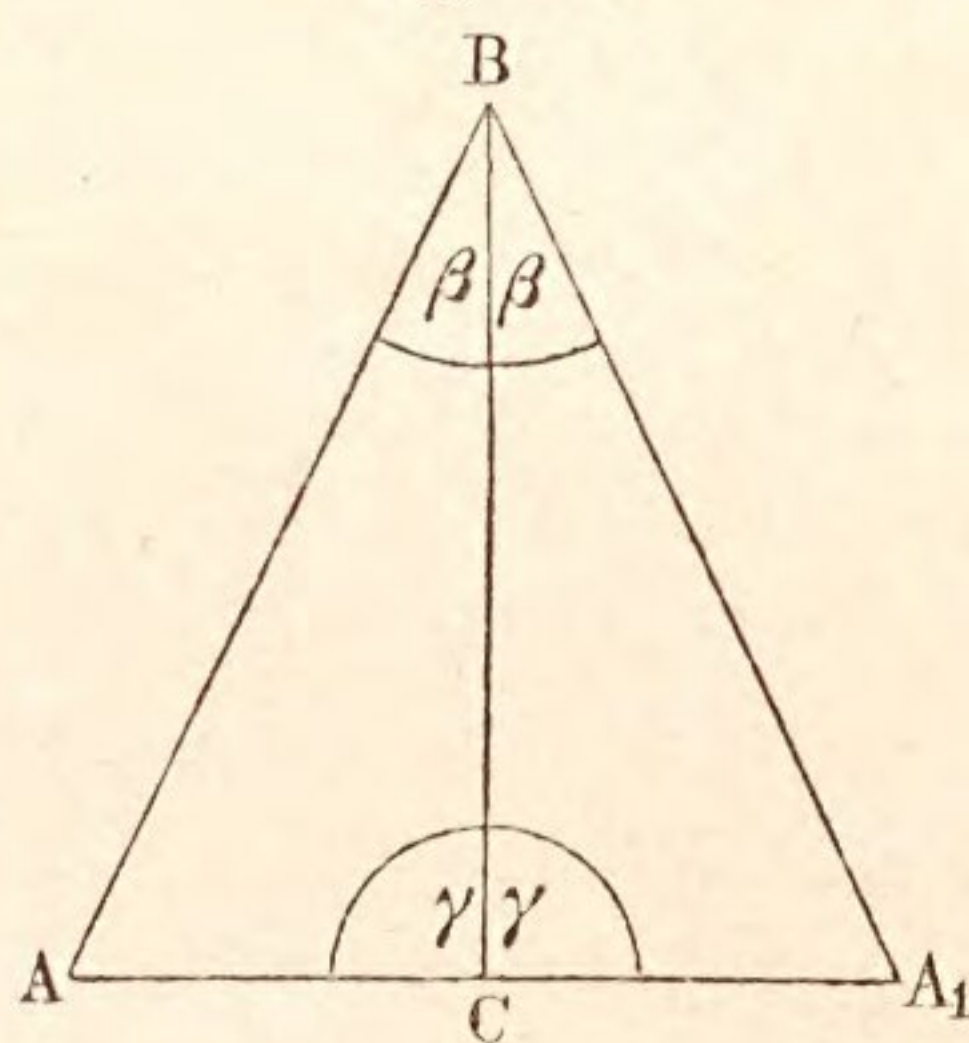


Fig. 34.





Da die in 96 und 97 ausgesprochenen Eigenschaften der Fig. 33 auch für Fig. 34 gelten, so hat man (indem man  $BC = BC$ ,  $BA = BA_1$ ,  $ABC = A_1BC$  zu Voraussetzungen wählt) die Sätze:

98. Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber. (Oder: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis einander gleich.)  
 99. Halbirt man im gleichschenkligen Dreieck den Winkel an der Spitze, so steht die Halbierungslinie senkrecht auf der Basis und halbirt dieselbe.

Anm. Umkehrungssätze. Zu 98: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Zum Beweise halbire man den dritten Winkel und benutze 78 und 90.)

Zu 99: Verbindet man im gleichschenkligen Dreieck die Spitze mit der Mitte der Basis, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Basis und halbirt den Winkel an der Spitze (93).

Fällt man im gleichschenkligen Dreieck eine Senkrechte von der Spitze auf die Basis, so halbirt dieselbe die Basis und den Winkel an der Spitze (98, 78, 90).

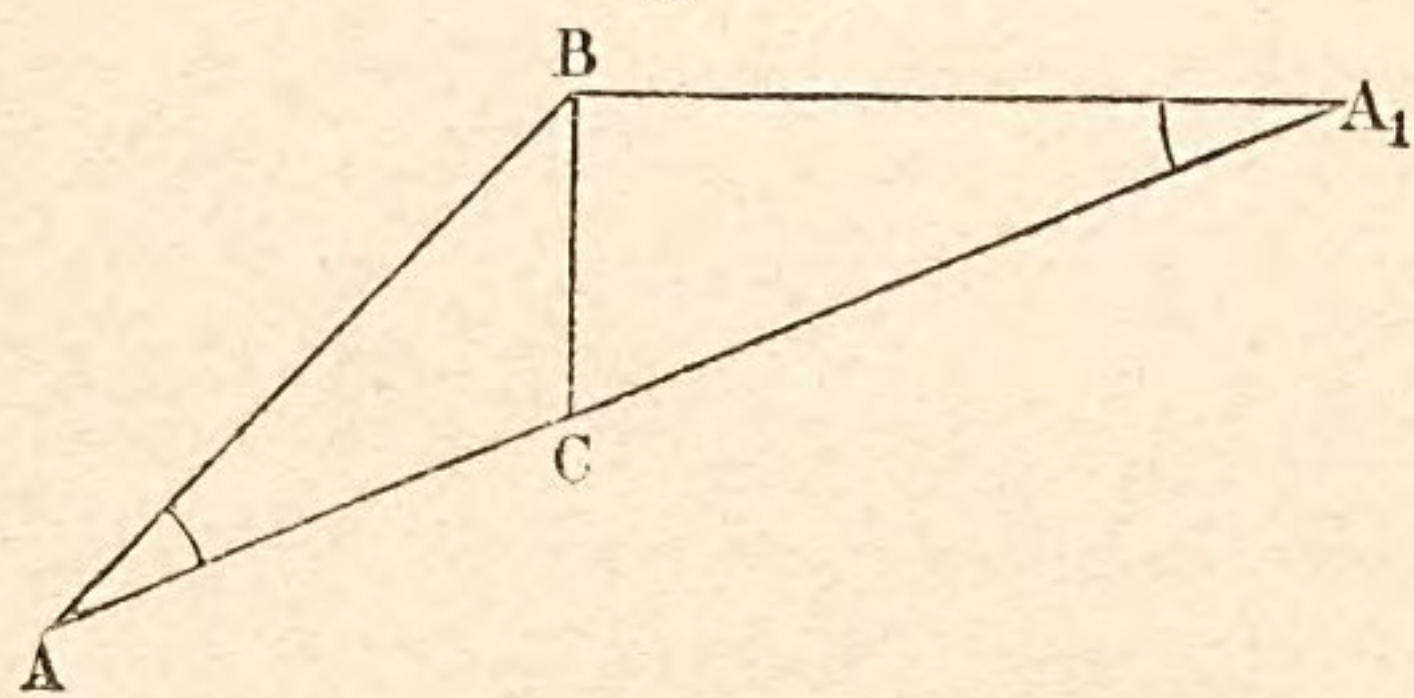
Ein weiterer Umkehrungssatz zu 99 folgt später (119).

100. Aus 98 folgt: Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich, und jeder beträgt  $\frac{2}{3}R$ . (76)  
 101. Der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so gross als jeder Basiswinkel. (79)  
 102. Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind stets spitz, die Aussenwinkel an der Basis stumpf.  
 103. Ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem ein Winkel  $\frac{2}{3}R$  beträgt, ist gleichseitig. (76, 100)

Anm. Wählt man in Fig. 33  $BA = BA_1$ ,  $BC = BC$ ,  $CA = CA_1$  zu Voraussetzungen, und verbindet  $A$  mit  $A_1$ , so ist nach 98 im Dreieck  $BAA_1$ :  $BAA_1 = BA_1A$ , und im Dreieck  $CAA_1$ :  $CAA_1 = CA_1A$ , folglich durch Addition:  $BAC = BA_1C$ ; also  $BAC \cong BA_1C$  nach 91. Hierdurch ist 93 bewiesen.

Wählt man in Fig. 33  $BA = BA_1$ ,  $BC = BC$ ,  $BAC = BA_1C$  zu Voraussetzungen und verbindet  $A$  mit  $A_1$ , so ist nach 98 im Dreieck  $BAA_1$ :  $BAA_1 = BA_1A$ , und da  $BAC = BA_1C$ , so folgt durch Subtraction:  $CAA_1 = CA_1A$ ; folglich (nach Umkehrung von 98)  $CA = CA_1$ ; also  $BAC \cong BA_1C$  nach 93. Hierdurch ist 92 bewiesen. — Ist  $BC < BA$ , so kann man zu einem Dreieck  $BAC$  (Fig. 35) ein andres construiren ( $BA_1C$ ), welches mit dem ersten in zwei Seiten und dem

Fig. 35.





der kleineren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmt, ohne dass beide Dreiecke congruent sind. (Zwei solche Dreiecke entstehen, wie die Figur zeigt, jedesmal, wenn man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem Punkte der Basis, den Mittelpunkt ausgenommen, verbindet.) Der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel ist dann in dem einen Dreieck ( $BCA$ ) stumpf, im anderen ( $BCA_1$ ) spitz. (Warum?) Dieser Fall wird also ausgeschlossen, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken  $\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} R$

ist. So erhält man als Ergänzung zu 92 den Satz: Zwei Dreiecke sind 104. congruent (oder symmetrisch), wenn sie in zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, während der der grösseren gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken ein spitzer, rechter oder stumpfer ist.

Speziell: Rechtwinklige Dreiecke sind congruent (oder sym- 105. metrisch), wenn sie in zwei homologen Seiten übereinstimmen.

**70. Zwei gleichschenklige Dreiecke.** — Verbindet man in Fig. 33 die Punkte  $A$  und  $A_1$ , so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke  $BAA_1$ ,  $CAA_1$ , mit gemeinsamer Basis, auf welcher  $BC$  senkrecht steht (99). Dies giebt den Satz:

Construirt man über derselben Basis zwei gleich- 106. schenklige Dreiecke, so halbirt die Verbindungslinie ihrer Spitzen die Winkel an den Spitzen und die Basis, und steht senkrecht zur Basis.

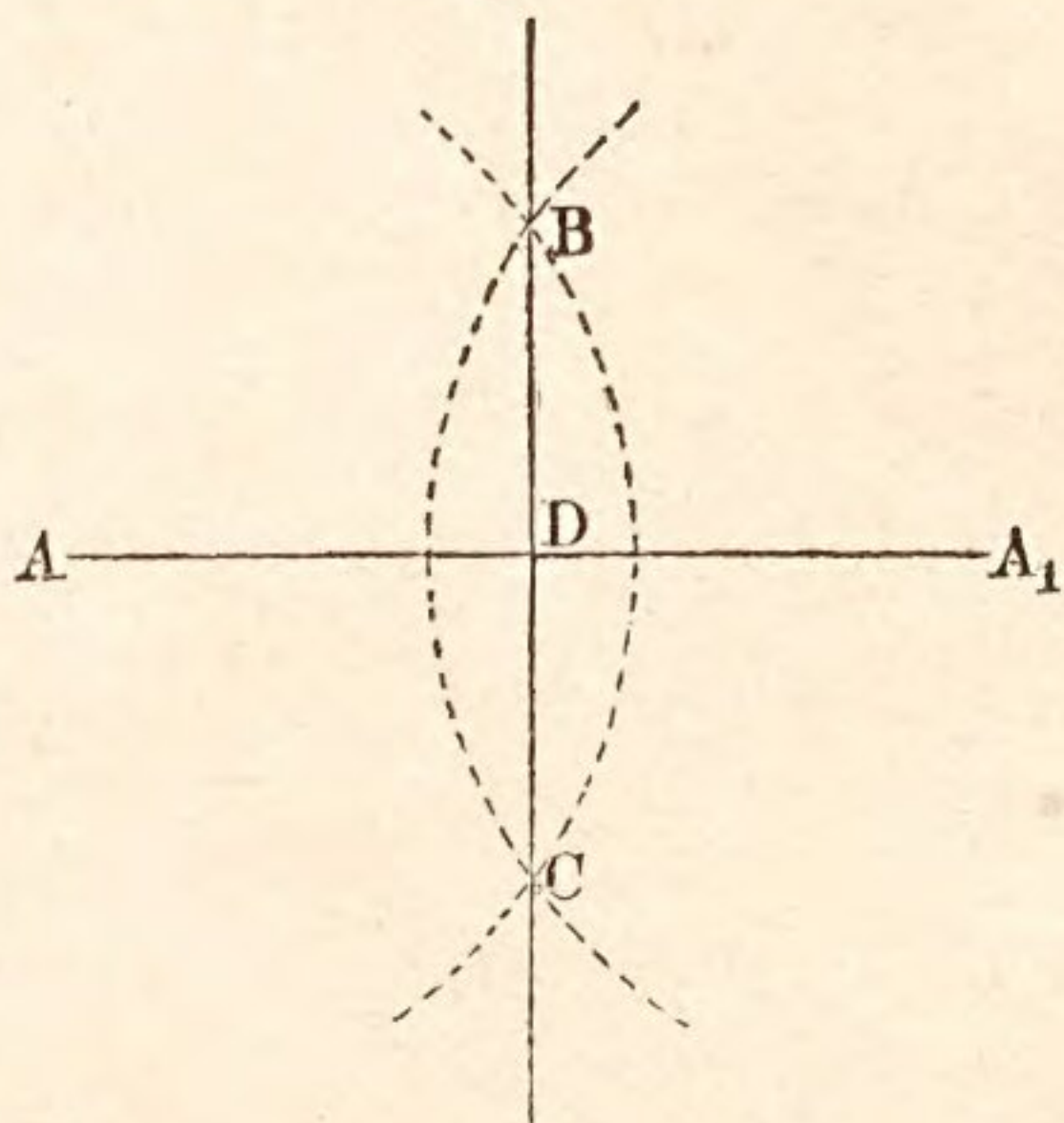
Da die in 106 erwähnte Construction (nach Anm. zu 93) bereits bekannt ist, so kann man diesen Satz benutzen, um folgende Fundamentalaufgaben zu lösen:

Aufgabe 2. — Eine gegebene Strecke ( $AA_1$ ) zu halbiren.

Man bringt die Strecke als gemeinsame Basis in zwei gleichschenklige Dreiecke und verbindet ihre Spitzen.

In kürzester Form lautet die Lösung: Man beschreibe aus den beiden Endpunkten der Strecke mit derselben Cirkelöffnung Kreislinien, die sich in zwei Punkten ( $B$ ,  $C$ ) schneiden. Die Verbindungslinie dieser Punkte halbirt die Strecke  $AA_1$  in  $D$ .

Fig. 36.



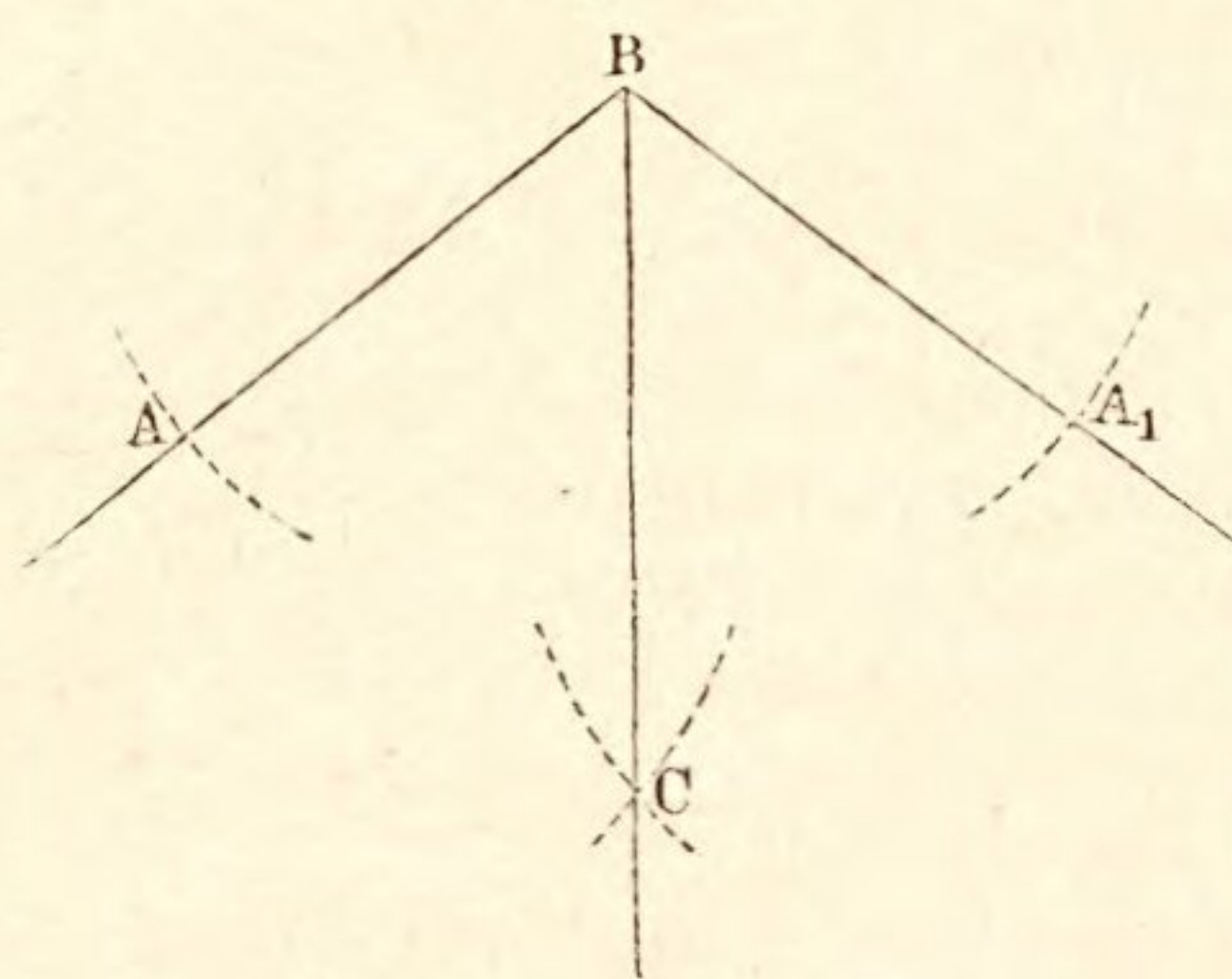
Anm. Theilung einer Strecke in 4, 8 gleiche Theile durch Wiederholung dieses Verfahrens. — Man halbire die drei Seiten eines Dreiecks und verbinde jeden Halbierungspunkt mit der gegenüberliegenden Ecke. Diese Verbindungslinien heissen die Mittellinien des Dreiecks.



Aufgabe 3. — Einen gegebenen Winkel ( $ABA_1$ ) zu halbiren.

Man bringt den Winkel als Winkel an der Spitze in eins von zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis, und verbindet ihre Spitzen.

Fig. 37.



In kürzester Form lautet die Lösung: Man schneide mit dem Cirkel vom Scheitel aus gleiche Strecken ( $BA$  und  $BA_1$ ) auf den Schenkeln ab, und beschreibe aus den Endpunkten ( $A$  und  $A_1$ ) mit derselben Cirkelöffnung Kreislinien, die sich in zwei Punkten schneiden. Die Verbindungslinie eines dieser Punkte ( $C$ ) mit  $B$  halbt den Winkel  $ABA_1$ .

Anm. Theilung eines Winkels in 4, 8 gleiche Theile durch Wiederholung dieses Verfahrens. — Man halbire die drei Winkel (und die Aussenwinkel) eines Dreiecks. Diese Linien heissen die Winkelhalbirenden des Dreiecks. — Vgl. erste Anm. in Nr. 91.

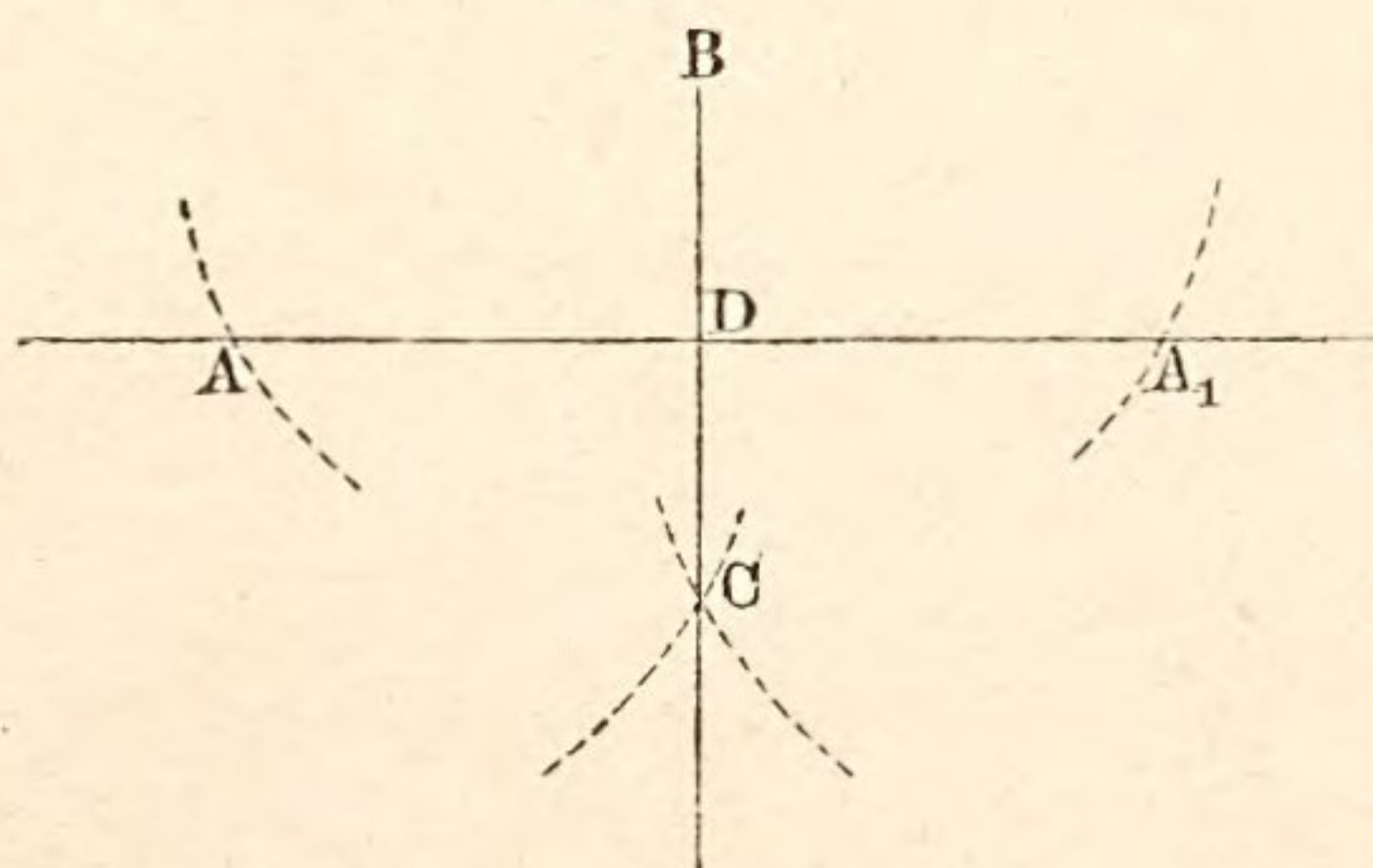
Ist der Winkel  $ABA_1$  ein gestreckter, so enthält die eben beschriebene Construction die Lösung der

Aufgabe 4. — Auf einer gegebenen Geraden ( $AA_1$ ) in einem gegebenen Punkte ( $B$ ) die Senkrechte zu errichten.

Anm. Man errichte in den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks die Senkrechten. Diese Linien heissen die Mittelsenkrechten des Dreiecks.

Aufgabe 5. — Von einem gegebenen Punkte ( $B$ ) aus die Senkrechte auf eine gegebene Gerade ( $AA_1$ ) zu fallen.

Fig. 38.



Man macht den Punkt zur Spitze des einen von zwei gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Basis auf der Geraden liegt, und verbindet ihre Spitzen.

In kürzester Form lautet die Lösung: Man beschreibe aus dem Punkte eine Kreislinie, welche die Gerade in zwei Punkten ( $A$  und  $A_1$ )

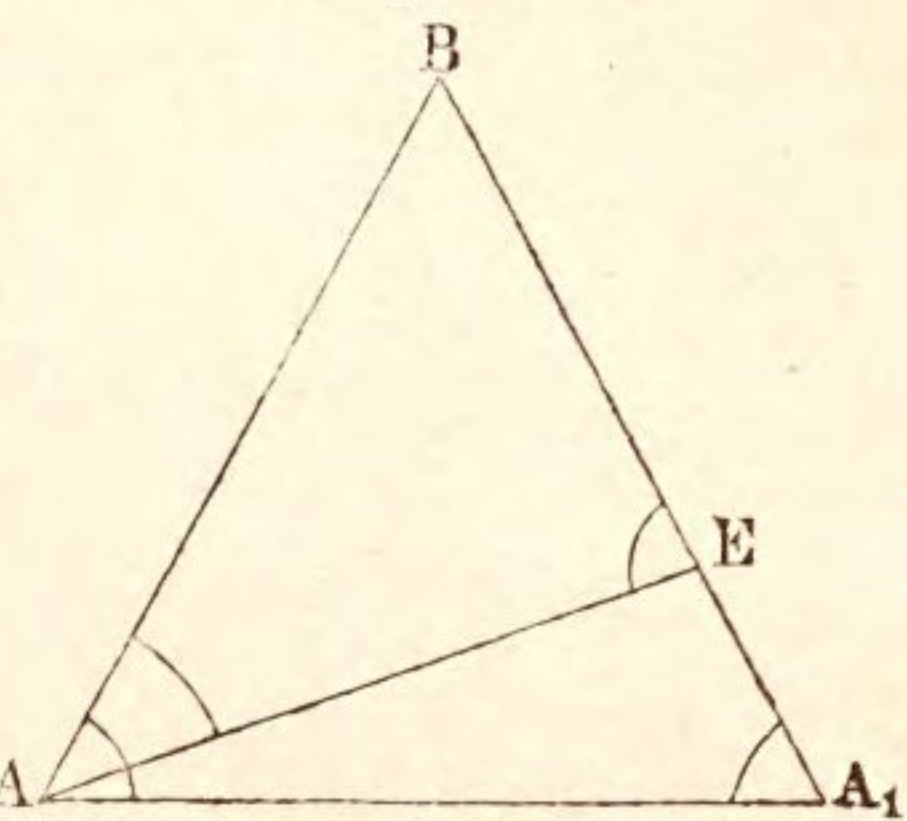
schneidet, und aus  $A$  und  $A_1$  mit derselben Cirkelöffnung Kreislinien, die sich in zwei Punkten schneiden. Die Verbindungslinie eines dieser Punkte ( $C$ ) mit  $B$  steht auf  $AA_1$  senkrecht.



Anm. Man fälle aus den drei Ecken eines Dreiecks die Senkrechten auf die gegenüberliegenden Seiten. Diese Linien heissen die Höhen des Dreiecks.

**71. Das ungleichseitige Dreieck.** — Verbindet man einen beliebigen Punkt  $E$  auf einem der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der gegenüberliegenden Ecke  $A$ , so ist in dem (ungleichseitigen) Dreieck  $\overline{BAE}$   $BA > BE$ . Ferner  $\angle BEA >$  der Basiswinkel  $\angle BA_1A$  (80), und  $\angle BAE <$  der Basiswinkel  $\angle BAA_1$ . Mithin  $\angle BEA > \angle BAE$ . Man hat also die Sätze:

Fig. 39.



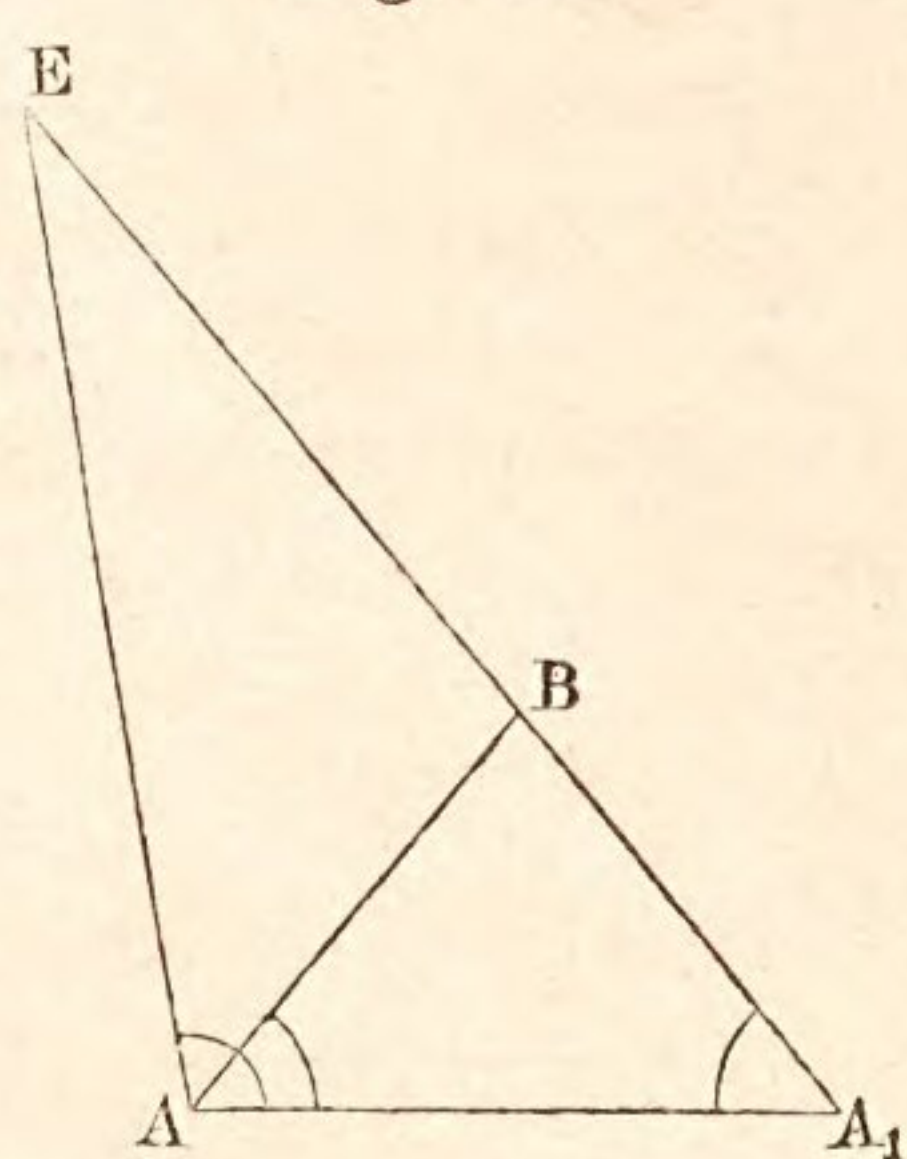
Der grösseren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der grössere Winkel gegenüber. — Dem grösseren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt die grössere Seite gegenüber.

Aus 107 folgt: Der grössten Seite im Dreieck liegt der grösste Winkel gegenüber, und umgekehrt. — Demnach ist im stumpfwinkligen Dreieck die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die grösste, und im rechtwinkligen ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (die Hypotenuse) grösser als jede der beiden anderen Seiten (Katheten). Kurz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete.

**72.** Verbindet man einen beliebigen Punkt  $E$  auf der Verlängerung eines der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der gegenüberliegenden Ecke  $A$ , so ist (bei Verlängerung über die Spitze hinaus) in dem Dreieck  $\overline{EAA_1}$   $EAA_1 > EA_1A$  (weil  $EAA_1 > BAA_1$  und  $BAA_1 = BA_1A$ ), folglich  $EA_1 > EA$  (107), oder (da  $EA_1 = EB + BA_1$  und  $BA_1 = BA$  ist):  $EB + BA > EA$ ; d. h.:

Fig. 40.

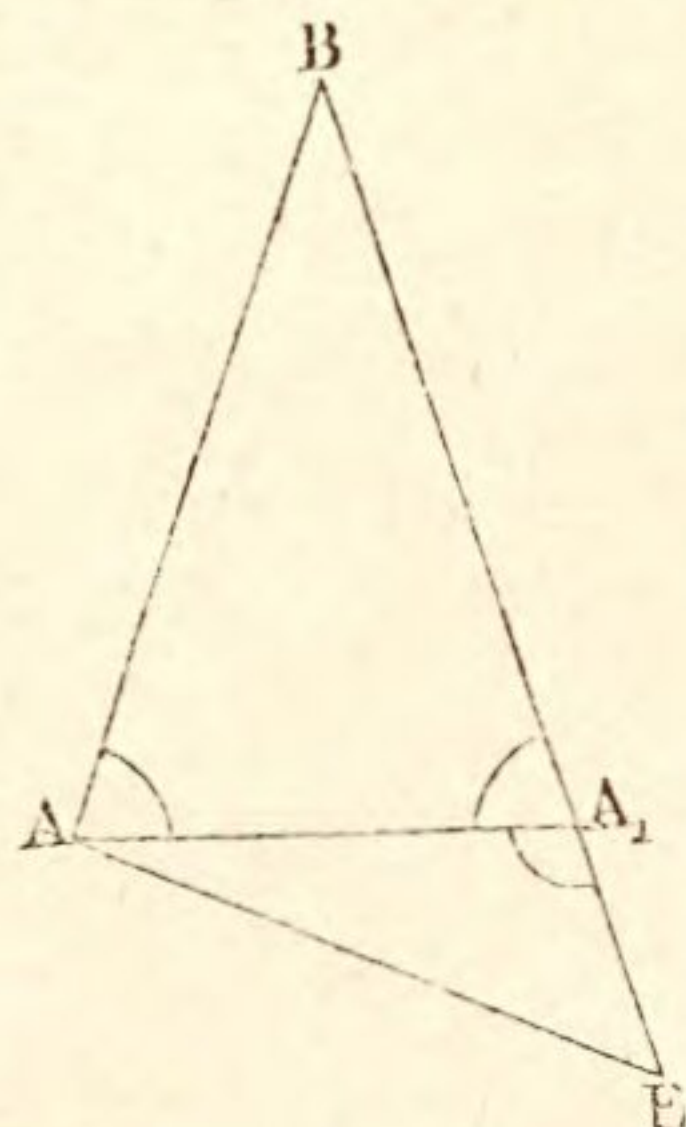


In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte (selbst wenn diese, wie in Fig. 40, die grösste ist).

Hat die Verlängerung des Schenkels über den Endpunkt der Basis hinaus stattgefunden (Fig. 41), so ist im Dreieck  $\overline{EAA_1}$   $EAA_1 < EA_1A$  (weil  $\angle EA_1A$  nach 102 stumpf ist), folglich  $EA_1 < EA$  (107), oder (da  $EA_1 = EB - BA_1$  und  $BA_1 = BA$  ist):  $EB - BA < EA$ ; d. h.:



110. Fig. 41.



In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte (selbst wenn diese, wie in Fig. 41, die kleinste ist).

Anm. 110 ist auch eine unmittelbare Folge von 109, da aus  $EB + BA > EA$  folgt:  $EB > EA - BA$ .

**73. Erweiterungen.** — In Fig. 25 ist  $AC + CD > AD$  (109); also durch Addition von  $DB$ :  $AC + CB > AD + DB$ . Aus demselben Grunde ist  $AD + DB > AE + EB$ ; also:  $AC + CB > AE + EB$ ; d. h.:

111. Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit zwei Ecken, so ist die Summe der Verbindungslinien kleiner als die Summe der von der dritten Ecke ausgehenden Seiten. (Vgl. 81.)

Verbindet man in einem Vieleck zwei auf anstossenden Seiten liegende Punkte, so ist der Umfang des neuen (eine Seite mehr enthaltenden) Vielecks kleiner als der des gegebenen (109). Denkt man sich dieses Verfahren auf das Dreieck angewendet und dann wiederholt, so erhält man den Satz:

112. Von zwei über derselben Strecke construirten Vielecken, deren Umfänge sich nicht schneiden, und von denen das innere nur concave Winkel enthält, hat das innere den kleineren Umfang.

Betrachtet man die gerade Verbindungsstrecke zweier Punkte als Zweieck (weitere Ausführung dieser Betrachtung!), so erscheint 109 als specieller Fall von 112. Den kleinsten Umfang unter allen über einer Strecke beschriebenen Figuren hat hiernach das Zweieck (d. h. die Strecke selbst), weil innerhalb desselben keine andere Figur möglich ist. Da, wie eine spätere Betrachtung zeigen wird, jede krumme Linie als Grenzfall einer aus geraden Strecken bestehenden angesehen werden kann (vgl. Anm. in Nr. 102), so kann man sagen:

113. Unter allen Verbindungslinien zwischen zwei Punkten ist die gerade die kürzeste. (Die gerade Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.)

**74. Entfernung.** — Die kürzeste Linie, die zwischen zwei geometrischen Gebilden gezogen werden kann, heisst ihre Entfernung (Abstand).

Hiernach ist die Entfernung zweier Punkte die gerade Verbindungsstrecke zwischen ihnen.

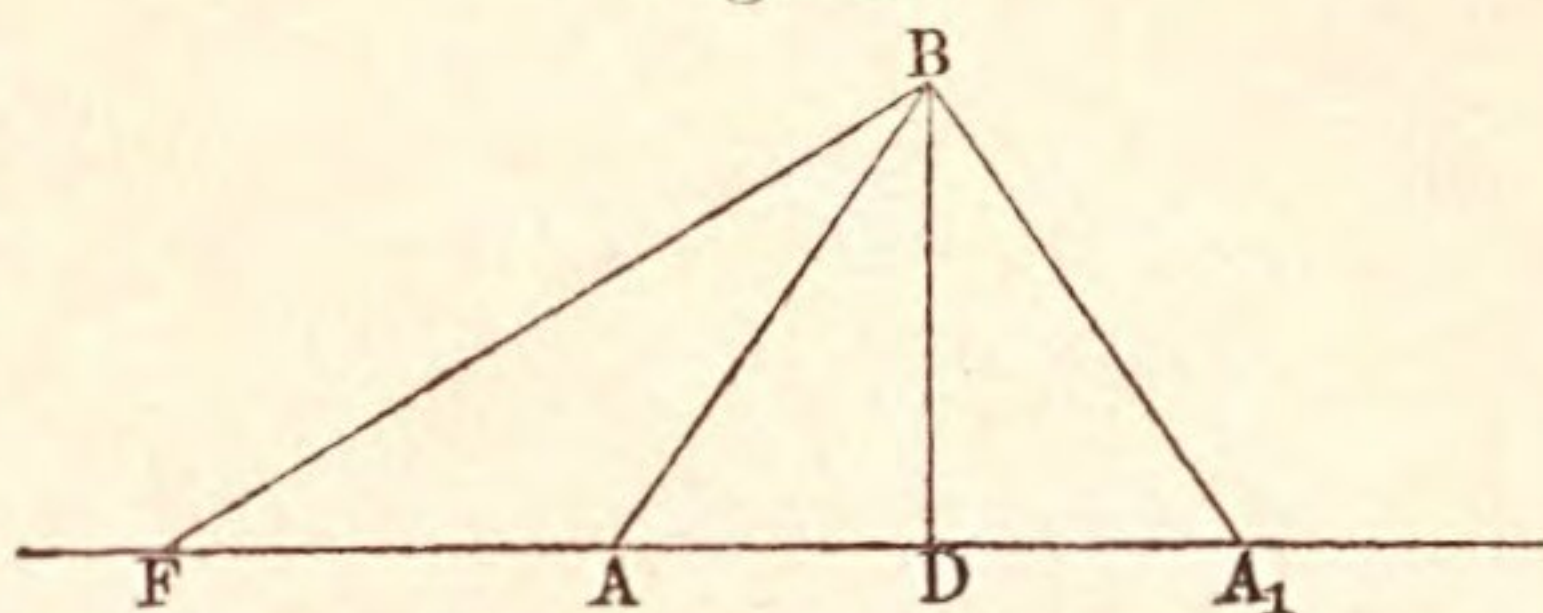
Aus 108 folgt:



Unter allen Strecken, die man zwischen einem Punkte und einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste. 114.

Demnach ist die Entfernung eines Punktes von einer Geraden die von dem Punkte auf die Gerade gefällte Senkrechte. — Nennt man den auf der Geraden liegenden Endpunkt einer von einem Punkte

Fig. 42.



( $B$ ) nach ihr gezogenen Strecke den Fusspunkt der Strecke, so folgt aus 99:

Sind von einem Punkte nach einer Geraden (ausser der Senkrechten) zwei gleichlange Strecken gezogen, so haben deren Fusspunkte vom Fusspunkte der Senkrechten gleichen Abstand (und umgekehrt). 115.

Da auf einer Geraden nur zwei Punkte existiren, deren Abstand von einem gegebenen Punkte ( $D$ ) gleich einer gegebenen Strecke ist, so folgt der Satz:

Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden kann man nach der Geraden nur zwei unter sich gleiche Strecken ziehen. 116.

Anm. Drei Punkte auf einer Geraden können also von einem ausserhalb liegenden Punkte nicht gleichen Abstand haben, so lange dieser Punkt sich in endlicher Entfernung befindet.

Im Dreieck  $BFA$  (Fig. 42) ist  $BF > BA$  (107, 102). Da gleichzeitig  $DF > DA$ , so folgt:

Sind von einem Punkte nach einer Geraden (ausser der Senkrechten) zwei ungleiche Strecken gezogen, so hat der Fusspunkt der längeren auch den grösseren Abstand vom Fusspunkte der Senkrechten (und umgekehrt). 117.

Da ferner  $BAD > BFD$  (80), so folgt weiter:

Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke ( $BFD$ ,  $BAD$ ) in einer Kathete überein, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere Hypotenuse hat, die grössere andere Kathete, aber den kleineren der ersten Kathete gegenüberliegenden Winkel (und umgekehrt). 118.

Denkt man sich in Fig. 42 durch  $B$  die Parallele zu  $AA_1$  gezogen, so ist nach 114 unter allen Strecken, die man von einem Punkte  $B$  dieser Parallele nach  $AA_1$  ziehen kann, die Senkrechte  $BD$  die kürzeste. Und da alle Punkte der Paral-



lelen, wenn sie sich nach  $AA_1$  verschiebt, gleiche Bewegungen machen, so kann auch kein anderer ihrer Punkte auf kürzerem Wege als  $B$  die Gerade  $AA_1$  erreichen. Demnach ist die Entfernung zweier Parallelen die in irgend einem Punkte der einen errichtete senkrechte Strecke.

Die Entfernung zweier Gebilde, die einen Punkt gemeinsam haben, ist (nach der Definition der Entfernung) gleich Null. Demnach ist auch die Entfernung zweier sich schneidenden Geraden gleich Null.

Da man über derselben Basis beliebig viele Paare gleichschenkliger Dreiecke construiren kann, für deren jedes Satz 106 gilt, und da nach diesem Satze die Verbindungslinie der Spitzen für alle dieselbe sein muss, so folgt, dass alle diese Spitzen auf der in der Mitte der Basis errichteten Senkrechten liegen. Dies giebt einen weiteren Umkehrungssatz zu 99, nämlich:

119. Errichtet man auf der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in ihrer Mitte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch die Spitze.

Da ferner jeder Punkt dieser Senkrechten als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks von den Endpunkten der Basis gleichweit entfernt ist, so hat man den Satz:

120. Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, ist die auf der Verbindungsstrecke beider Punkte in ihrer Mitte errichtete Senkrechte.

Trägt man auf den Schenkeln eines Winkels  $ABA_1$  (Fig. 33) vom Scheitel aus gleiche Stücke ab ( $BA = BA_1$ ), und in den Endpunkten gleiche Winkel an ( $BAC = BA_1C$ ) deren Schenkel sich in  $C$  schneiden, so ist  $CA = CA_1$  und  $ABC = A_1BC$ .

Ist insbesondere  $BAC = BA_1C = R$ , so sind  $CA$  und  $CA_1$  die Entfernungen des Punktes  $C$  von  $BA$  und  $BA_1$ . Und da man, vom Winkel  $ABA_1$  ausgehend, beliebig viele Punkte  $C$  in der angegebenen Weise construiren kann, die alle auf der Geraden  $BC$  liegen, so hat man den Satz:

121. Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist von den Schenkeln desselben gleichweit entfernt.  
 122. Oder: Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen Geraden gleichweit entfernt ist, ist das Geradenpaar, welches die Winkel der gegebenen Geraden halbt.

Anm. Da die Hälften zweier Nebenwinkel zusammen einen Rechten betragen, so stehen diese winkelhalbirenden Geraden auf einander senkrecht.



**75.** Zieht man aus einem Endpunkte ( $A$ ) der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks eine beliebige Strecke ( $AE$ ), welche den gegenüberliegenden Schenkel schneidet, und verbindet  $E$  auch mit den beiden anderen Ecken des Dreiecks, so ist

$$EAA_1 < BAA_1 \text{ und } EA_1A > BA_1A;$$

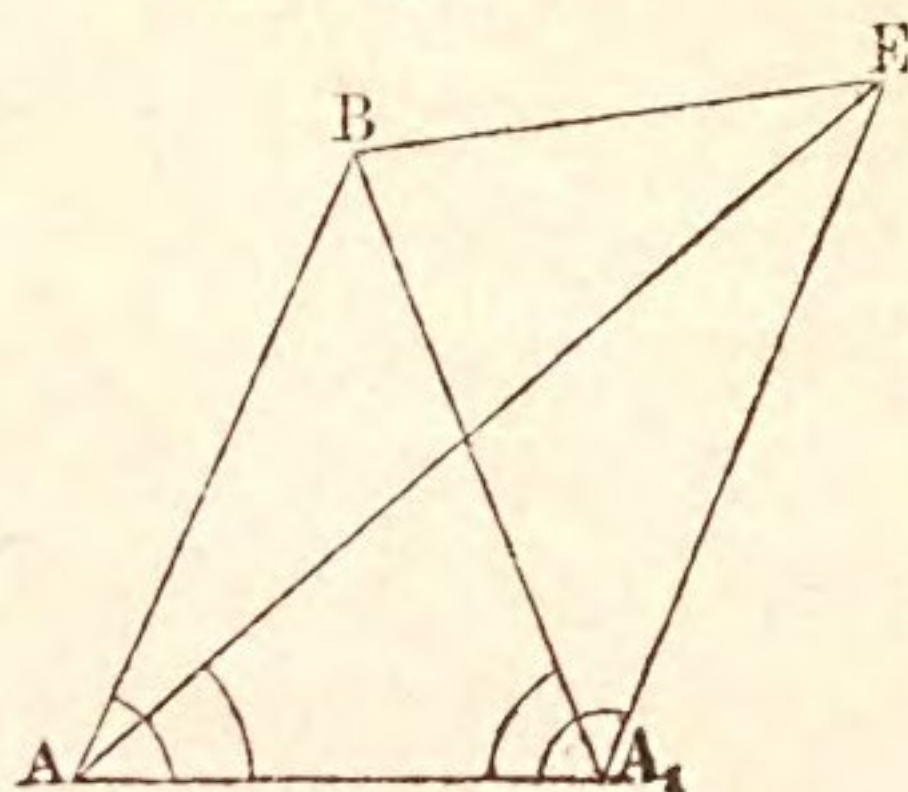
Fig. 43.

also, da  $BAA_1 = BA_1A$  (98):

$$EA_1A > EAA_1;$$

folglich (107):  $EA > EA_1$ .

In den Dreiecken  $ABE$  und  $A_1BE$ , in welchen  $AB = A_1B$  und  $BE = BE$ , ist also gleichzeitig  $\angle ABE > \angle A_1BE$  und  $AE > A_1E$ . Man hat also den Satz:



Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere dritte Seite hat, auch den grösseren eingeschlossenen Winkel (und umgekehrt).

Anm. Sind im Allgemeinen in zwei Dreiecken zwei Stücke (unter denen wenigstens eine Seite ist) gleich, während ein drittes Stück ungleich ist, so sind auch die drei anderen Stücke ungleich. Man kann in jedem einzelnen Falle in ähnlicher Weise, wie soeben geschehen, untersuchen, in welchem der beiden Dreiecke ein bestimmtes Stück das grössere ist. (Vgl. Nr. 91.) Viel einfacher aber ergeben sich alle diese Resultate aus den Sätzen der Trigonometrie.

**76.\* Rückblick.** — Zwischen den oben betrachteten Gebilden: Punkt und Strecke, Gerade und Winkel, besteht noch ein besonderer Zusammenhang, welcher schon in einigen der bisher gefundenen Sätze hervortritt. Zuerst sei daran erinnert, dass Punkt und Gerade nicht das Merkmal einer bestimmten Grösse haben, wohl aber Strecke und Winkel. Wie die Strecke das Mass für die Vorwärtsbewegung des Punktes, so ist der Winkel das Mass für die Drehung der Strecke. Wie die Strecke durch ihre beiden Endpunkte, so ist der Winkel durch die beiden Geraden, welche seine Schenkel bilden, vollkommen bestimmt.

Beziehung zwischen Punkten und Geraden. — Zwei einfache Gebilde, welche zusammen ein einfaches Gebilde mit mehr Dimensionen vollkommen bestimmen, heissen reciprok zu einander in Bezug auf das durch sie bestimmte Gebilde. — Demnach sind zwei Punkte reciprok zu einander in Bezug auf die durch sie bestimmte Gerade. Und da zur Bestimmung einer Ebene ein Punkt und eine (nicht durch ihn



gehende) Gerade ausreichend sind, so sind Punkt und Gerade reciprok zu einander in Bezug auf die durch sie bestimmte Ebene.

Das Wesen der Reciprocität besteht nun darin, dass jeder Beziehung zwischen einfachen Gebilden, welche alle in einem durch zwei von ihnen bestimmten Gebiete liegen, eine Beziehung zwischen den reciproken Gebilden entspricht. Jeder Satz, der eine solche Beziehung ausspricht, zieht also ohne Weiteres einen anderen Satz nach sich. (Reciprocitäts-Gesetz.)

Im Gebiete der Geraden entstehen auf diese Weise keine neuen Sätze, weil hier der Punkt dem Punkte reciprok ist. Im Gebiete der Ebene dagegen kann das Reciprocitäts-Gesetz in folgender Fassung ausgesprochen werden:

124. Aus jedem Satze, der von Geraden und Punkten einer Ebene handelt, geht ein neuer Satz hervor, wenn man die Ausdrücke „Punkt“ und „Gerade“ mit einander vertauscht.

Im Folgenden sind eine Anzahl bereits bekannter reciproker Sätze einander gegenübergestellt. (Zu den Punkten zählen hierbei auch die unendlich fernen.)

Eine Gerade wird durch zwei Punkte vollständig bestimmt.

Durch zwei Punkte geht stets eine Gerade.

Durch zwei zusammenfallende Punkte gehen unendlich viele Geraden.

Durch je zwei von drei Punkten gehen im Ganzen drei Geraden (Fig. 14, 2b).

Ein Punkt wird durch zwei Geraden vollständig bestimmt.

Zwei Geraden haben stets einen Punkt gemeinsam (Fig. 6 und 8).

Zwei zusammenfallende Geraden haben unendlich viele Punkte gemeinsam.

Je zwei von drei Geraden schneiden sich im Ganzen in drei Punkten (Fig. 14, 2b).

Anm. Von diesen drei Punkten fällt in Fig. 14, 3 der eine in unendliche Entfernung, in Fig. 14, 1 alle drei.

Drei Punkte können auf einundderselben Geraden liegen.

Drei Geraden können durch einunddenselben Punkt gehen (Fig. 14, 2a und 1).

Beziehung zwischen Strecken und Winkeln. — Aus den oben zusammengestellten Sätzen über den Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade einerseits, Strecke und Winkel andererseits, geht hervor, dass zwischen den letzteren Gebilden dieselbe Reciprocität obwaltet wie zwischen den ersteren.



Eine Reihe von Sätzen über das Dreieck, in denen man die Ausdrücke „Seite“ und „Winkel“ vertauschen kann, bestätigt dies. Namentlich sind die Sätze über das Gegenüberliegen von Seiten und Winkeln zu ihren Umkehrungssätzen reciprok.

Anm. Ausgeschlossen von diesem Zusammenhange sind diejenigen Sätze, welche nur die Grösse, nicht aber die Lage und Richtung der Strecken berücksichtigen (z. B. 109, 110). Das letztere muss auch geschehen, wenn man zu den die Grösse der Winkel betreffenden Sätzen reciproke Sätze finden will. So entsprechen sich z. B. die Sätze:

|                                                              |                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Durch zwei Winkel eines Dreiecks<br>ist der dritte bestimmt. | Durch zwei nach Grösse und<br>Richtung gegebene Seiten eines<br>Dreiecks ist die dritte bestimmt. |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|

Aber die Rechnung mit Strecken, welche nach Grösse und Richtung gegeben sind, hat in die Elementar-Mathematik noch keinen Eingang gefunden und wird daher hier übergangen.\*)

#### γ) Dreimalige Bewegung der Geraden.

77.\* *Uebersicht.* — Sind in der Ebene vier Geraden gegeben, so sind folgende Fälle möglich:

- 1) Alle vier Geraden sind parallel.
- 2) Drei parallele Geraden werden von der vierten geschnitten.
- 3) Je zwei Geraden sind unter einander parallel.
- 4) Zwei Geraden sind parallel; die beiden andern schneiden sich in einem Punkte, der a) auf keiner der Parallelen, b) auf einer der Parallelen liegt.
- 5) Alle Geraden schneiden sich gegenseitig a) in 6 Punkten, indem durch jeden Punkt zwei Geraden gehen, b) in 4 Punkten, indem 3 Schnittpunkte in einen zusammenfallen, durch welchen drei Geraden gehen, c) in 1 Punkte, indem alle 6 Schnittpunkte in einen zusammenfallen, durch welchen alle vier Geraden gehen.

Anm. Man zeichne Figuren zu allen diesen Fällen, zeige, inwiefern einzelne dieser Fälle als specielle Fälle in anderen enthalten sind, und bestimme die Ordnung derselben nach der Anzahl der Schnittpunkte. Man leite alle Fälle ab, indem man zu Fig. 14 noch eine Gerade auf alle möglichen Arten hinzufügt. — Man nehme ferner vier Punkte in der Ebene an, ziehe durch je zwei derselben eine Gerade, und bestimme die Fälle, in denen Geraden zusammenfallen oder parallel werden.

Anlass zu neuen Betrachtungen geben nur die Fälle 3), 4a) und 5a), in denen von den 6 Schnittpunkten der vier Geraden zwei oder einer oder keiner in unendliche Entfernung fällt.

\*) Dieser, die Elemente ergänzende Zweig der Mathematik findet sich dargestellt in des Vf. „System der Raumlehre“, Leipzig 1872 u. 1875.

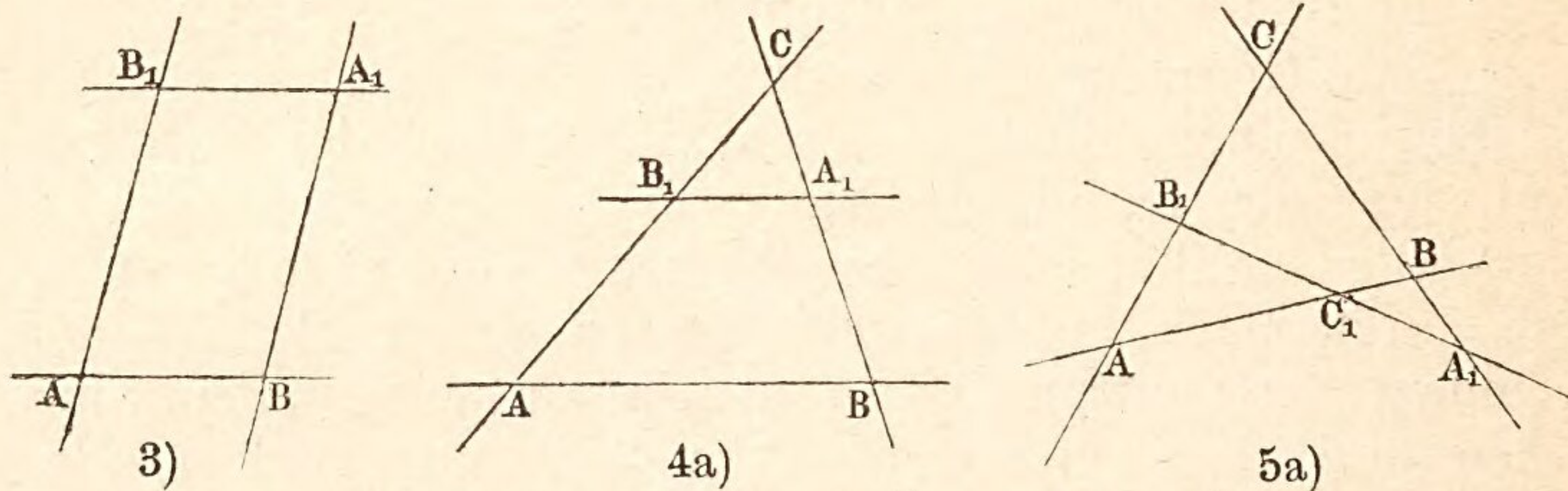


## Das Viereck.

78. Vier Geraden, welche sich paarweise in wenigstens vier endlich fernen Punkten schneiden, begrenzen vollständig einen Theil der Ebene, bilden also eine Figur, welche Viereck heisst. Seiten und Winkel des Vierecks werden ebenso bestimmt, wie beim Dreieck, ebenso die Aussenwinkel und die Begriffe der einer Seite anliegenden Winkel und der einen Winkel einschliessenden Seiten. In Bezug auf eine Seite heissen diejenigen beiden Seiten, welche einen Eckpunkt mit ihr gemeinsam haben, anstossende Seiten, die vierte Seite: gegenüberliegende Seite (Gegenseite). In Bezug auf einen Winkel heissen diejenigen beiden Winkel, welche einen Schenkel mit ihm gemeinsam haben, benachbarte Winkel, der vierte Winkel: gegenüberliegender Winkel.\*)

In einem Vierecke können zwei Seitenpaare oder eins oder keins parallel sein. Im ersten Falle (3) heisst das Viereck Parallelogramm, im zweiten (4a) Trapez. Das Parallelogramm ist ein specieller Fall des Trapezes, und dieses ein specieller Fall des Vierecks.

Fig. 44.



Anm. In Fig. 44 ist die erste Figur  $\overline{ABA_1B_1}$  ein Parallelogramm, die zweite  $\overline{ABA_1B_1}$  ein Trapez, die dritte enthält drei Vierecke, nämlich das nur concave Winkel enthaltende gemeine Viereck  $\overline{BCB_1C_1}$ , das einen convexen Winkel ( $\angle AC_1A_1$ ) enthaltende einspringende Viereck  $\overline{CAC_1A_1}$ , das zwei convexe Winkel ( $\angle ABA_1$  und  $\angle BA_1B_1$ ) enthaltende überschlagene Viereck  $\overline{ABA_1B_1}$ , welches aus zwei getrennten Dreiecksflächen von entgegengesetztem Sinne besteht. — Der Inbegriff von vier in 6 Punkten sich schneidenden Linien (oder von vier durch 6 Geraden verbundenen Punkten) heisst vollständiges Viereck.

Die Strecken, welche zwei nicht benachbarte Ecken eines Vierecks (einer Figur) verbinden, heissen Diagonalen.

\*) Nicht aber Gegenwinkel, weil dieser Name schon bei Parallelen vorkommt, und daher bei Vierecken mit parallelen Seiten Verwirrung entstehen würde.



Anm. Jedes Viereck hat zwei Diagonalen (in den einzelnen Figuren 44 die Strecken  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ), das „vollständige Viereck“ jedoch drei. Ausserhalb der Fläche des Vierecks liegt im gemeinen Viereck keine, im einspringenden eine, im überschlagenen jede der beiden Diagonalen. — Die beiden Endpunkte einer Diagonale bilden mit jeder der beiden anderen Ecken des Vierecks ein Dreieck. Das gemeine Viereck wird durch jede Diagonale in zwei Dreiecke getheilt. In welcher Beziehung steht die Fläche des Vierecks zur Fläche der beiden Dreiecke im einspringenden und überschlagenen Viereck? — In wieviele Theile zerfällt die Ebene durch 4 Geraden? Welche Theile werden durch 2, 3, 4 Geraden begrenzt?

Im  $n$ -Eck kann man aus jeder Ecke  $n-3$  Diagonalen ziehen (warum?), im Ganzen also  $\frac{n(n-3)}{2}$  Diagonalen (warum?). (Zahlenbeispiele!)

Wie den Eckpunkten eines Vierecks die Seiten, so entsprechen den Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Eckpunkte (den Diagonalen) die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten (in der dritten Fig. 44 je nach der Wahl des Vierecks die Punktpaare  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ).

## b. Die Strecke und ihre Bewegungen in der Ebene.

### 1) Lagenänderung der Strecke. — Das Parallelogramm.

#### a) Einmalige Bewegung der Strecke.

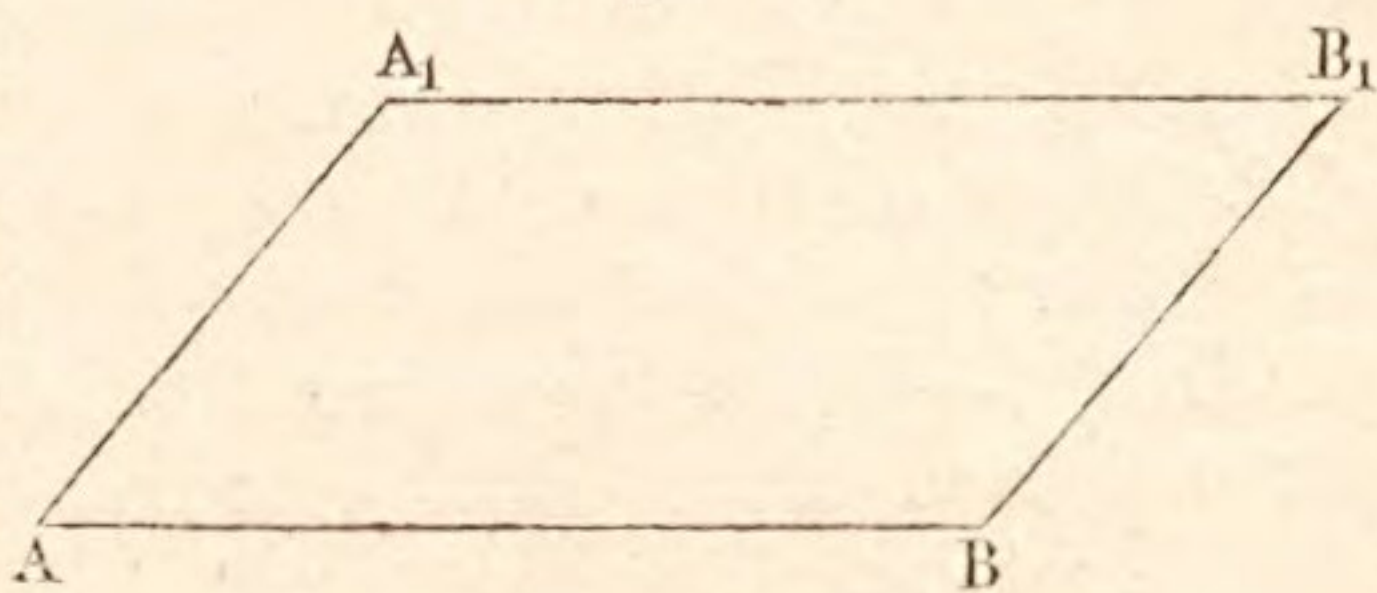
**79.** Ist eine Strecke  $AB$  durch Aenderung ihrer Lage nach  $A_1B_1$  gekommen, so ist zuerst  $A_1B_1 \parallel AB$  und  $A_1B_1 = AB$ . Da ferner nach 29 die Endpunkte der Strecke gleichgrosse und gleichgerichtete Strecken beschreiben, so ist auch  $AA_1 \parallel BB_1$  und  $AA_1 = BB_1$ . D. h.:

Aendert eine Strecke ihre Lage so, dass einer ihrer Punkte eine gerade Strecke beschreibt, so ist die von der Strecke beschriebene Figur ein Parallelogramm. — Anders ausgedrückt: Sind in einem Viereck\*) 125. zwei Gegenseiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Im Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten ein- 126. ander gleich. — Anders ausgedrückt: Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Anm. Anderer Beweis für 125 und 126 durch Ziehen einer Diagonale und Nachweis der Congruenz der beiden entstehenden Dreiecke aus 66 und 91, resp. 90. — Umkehrung von 126: Sind in einem Viereck je zwei Gegenseiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm (93, Anm. z. 70, 125).

Fig. 45.



\*) Hier, wie im Folgenden, ist nur vom gemeinen Viereck die Rede; für die anderen Arten verlieren manche der folgenden Sätze (z. B. Umk. v. 126) ihre Geltung.



Aus der Umkehrung von 126 folgt die kürzeste Lösung der Aufgabe 6. — Durch einen gegebenen Punkt ( $A_1$ ) die Parallele zu einer gegebenen Geraden ( $AB$ ) zu ziehen.

Man beschreibt aus  $A_1$  und aus einem beliebigen Punkte  $A$  der Geraden zwei Kreisbogen mit gleichem Radius, und aus dem Punkte  $B$ , in welchem der zweite Bogen die Gerade schneidet, mit dem Radius  $AA_1$  einen dritten Bogen, welcher den ersten in  $B_1$  schneidet. Dann ist die Verbindungsstrecke  $A_1B_1 \parallel AB$ .

Anm. Man ziehe durch die Ecken eines Dreiecks die Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten. Dann entstehen 3 Parallelogramme, und ein (durch die Parallelen gebildetes) Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des gegebenen Dreiecks halbirt werden (126). Betrachtet man dieses neue Dreieck als das gegebene, so erhält man den Satz:

127. Verbindet man die Mitten der Seiten eines Dreiecks, so entsteht ein neues Dreieck, in welchem jede Seite mit einer Seite des gegebenen Dreiecks parallel und von halber Länge ist.

Aus 62 folgt:

128. Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Anm. Hieraus, und aus 67 folgt, dass durch einen Winkel des Parallelogramms alle übrigen bestimmt sind. Wieviele spitze und stumpfe Winkel enthält hiernach ein Parallelogramm?

Aus 126 folgt:

129. Sind in einem Parallelogramm zwei anstossende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich.

Ein Viereck, in welchem alle Seiten gleich sind, heisst Rhombus (Raute).

Aus 128 folgt:

130. Sind in einem Parallelogramme zwei benachbarte Winkel gleich, so sind alle Winkel gleich (und jeder  $= R$ ).

Ein Viereck, in welchem alle Winkel gleich sind, heisst Rechteck. — Ein Viereck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heisst Quadrat.

Anm. Warum sind alle Rhomben, Rechtecke und Quadrate gleichzeitig Parallelogramme? Was für ein Parallelogramm ist der Rhombus, das Rechteck, das Quadrat? Was für ein Rhombus, Rechteck ist das Quadrat? — Alle Eigenschaften des Parallelogramms besitzen auch Rhombus und Rechteck. Das Quadrat vereinigt die Eigenschaften von Rhombus und Rechteck.

131. 80. *Eigenschaften der Diagonalen.* — Eine Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. (66, 91)



Anm. Zwei anstossende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel sind gleichzeitig Stücke des Dreiecks und des Parallelogramms. Nach 131 ist also ein Parallelogramm durch zwei anstossende Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt. (Dies folgt auch aus der Entstehung des Parallelogramms durch Verschiebung einer Strecke.) Durch jedes Parallelogramm ist ein Dreieck bestimmt, wenn man eine Diagonale zieht, durch jedes Dreieck ein Parallelogramm, wenn man durch zwei Ecken Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten zieht. — Wann sind hiernach Parallelogramme, Rechtecke, Rhomben, Quadrate congruent? — Welche Arten von Dreiecken entstehen, wenn in einer dieser Figuren eine Diagonale gezogen wird? — Wie lässt sich 131 umkehren? (Vgl. das Viereck  $ABA_1C$ , Fig. 33.) — Construction eines Parallelogramms aus zwei anstossenden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Beide Diagonalen zusammen theilen das Parallelo- 132.  
gramm in vier Dreiecke, von denen je zwei an den  
Gegenseiten liegende congruent sind. (66, 90)

Aus 132 folgt:

Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren 133.  
einander.\*)

Zieht man durch den Schnittpunkt der Diagonalen eine  
Parallele zu einem Seitenpaare, so folgt aus 33, dass jede  
durch diesen Schnittpunkt zwischen den beiden Seiten gezo-  
gene Strecke in ihm halbirt wird. Also:

Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen 134.  
eines Parallelogramms zwischen zwei Punkten seines  
Umfanges gezogene Strecke wird in diesem Punkte  
halbirt und schneidet auf den Gegenseiten gleiche  
Stücke ab. (91)

Ein Punkt, welcher die Eigenschaft besitzt, dass jede  
durch ihn zwischen zwei Punkten des Umfangs einer Figur  
gezogene Strecke in ihm halbirt wird, heisst Mittelpunkt  
der Figur. — Hiernach ist der Schnittpunkt der Diagonalen  
Mittelpunkt des Parallelogramms.

Wenn in einem Viereck die Diagonalen einander 135.  
halbiren, so ist es ein Parallelogramm (91, 125). (Um-  
kehrung zu 133.)

Anm. Hieraus folgt eine einfache Construction des Paral-  
lelogramms.

Da der Rhombus durch jede seiner Diagonalen in zwei  
gleichschenklige Dreiecke über derselben Basis zerfällt, so  
folgt aus 106:

---

\*) Das Analogon dieses Satzes in der Longimetrie ist der Satz 24.  
(Vgl. „System der Raumlehre“ I. Nr. 44.) Eine bessere Ableitung von  
133 folgt in der letzten Anm. zu Nr. 94.



136. Im Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbieren die Winkel.

Anm. Umkehrungssätze: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen auf einander senkrecht stehen (133, 91), oder wenn eine Diagonale einen Winkel halbiert (66, Umk. z. 98), so ist es ein Rhombus.

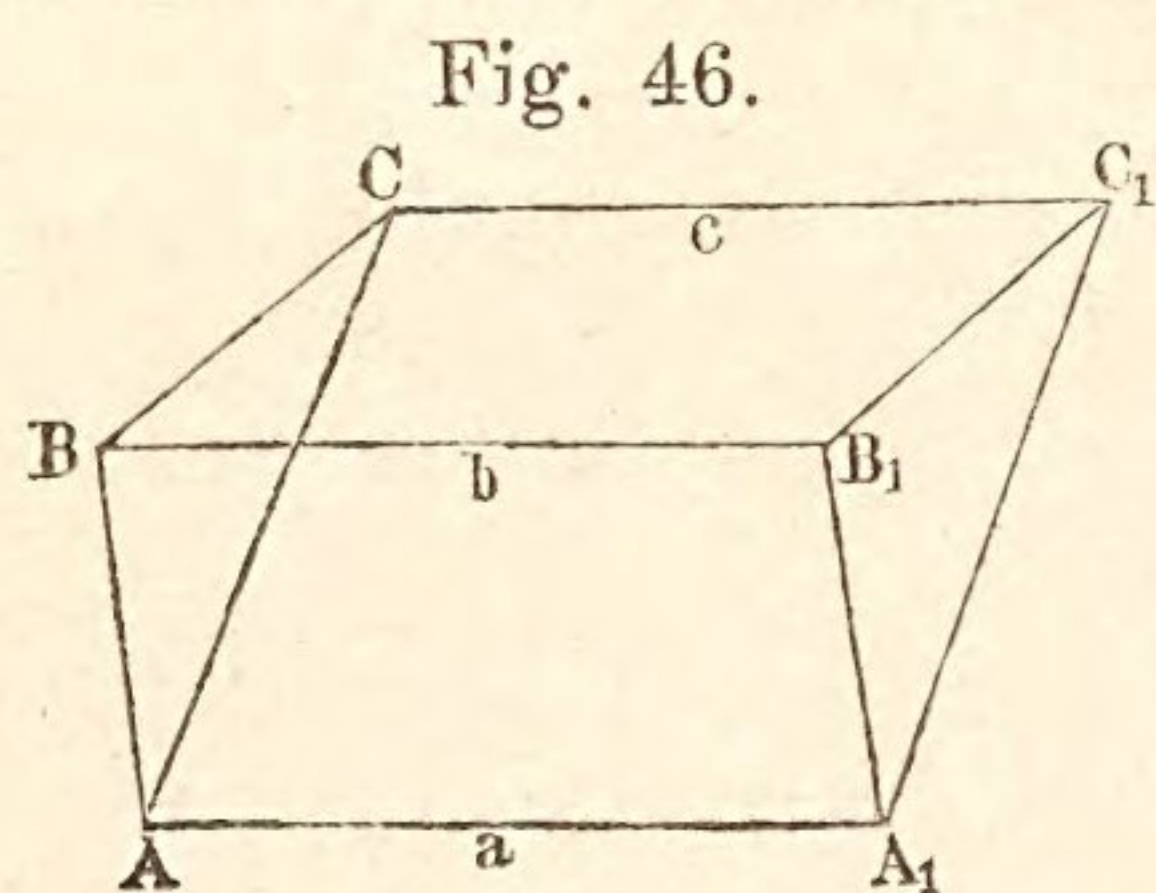
137. Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich. (91)

Anm. Umkehrungssatz: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen einander gleich sind, so ist es ein Rechteck (93, 130). — Welche Eigenschaften haben hiernach die Diagonalen eines Quadrates? — Welche Arten von Dreiecken entstehen, wenn im Parallelogramm, Rhombus, Rechteck, Quadrat beide Diagonalen gezogen werden?

β) Mehrmalige Bewegung der Strecke.

1. Die geometrischen Operationen mit Parallelogrammen.

81.\* *Addition.* — Bewegt sich eine Strecke  $a$  in der Ebene durch Verschiebung erst nach  $b$ , und dann weiter nach  $c$ , so



beschreibt sie nach einander die Parallelogramme  $ab$  und  $bc$ . Durch directe Verschiebung von  $a$  nach  $c$  würde sie das Parallelogramm  $ac$  beschreiben. Da nach 29 und 89 die Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  congruent, also auch flächengleich sind, so ist (wie aus Fig. 46 leicht zu ersehen)

$$1) \quad ab + bc = ac.$$

Anm. Hierbei wird der Begriff der Summe von Zahlen ebenso auf Flächenräume übertragen, wie in Nr. 17 auf Strecken.

Nennt man zwei Gegenseiten eines Parallelogramms seine beiden Grundlinien, so ergibt sich die Regel:

138. Soll man zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie addiren, so legt man sie so *hinter* einander, dass ihre ersten Grundlinien zusammenfallen. Dann ist ihre Summe das Parallelogramm zwischen ihren anderen Grundlinien.

Anm. Addition mehrerer Parallelogramme durch wiederholte Anwendung von 138. — Aus Fig. 46, die man sich auch durch Verschiebung des Dreiecks  $ABC$  nach  $A_1B_1C_1$  entstanden denken kann, folgen weiter die Sätze: Zieht man aus den Ecken einer Figur gleiche parallele Strecken, so sind deren Endpunkte die Ecken einer mit der ersten congruenten Figur. — Liegen zwei congruente Figuren so, dass die Seiten der einen bzw. gleichgerichtet sind mit denen der andern, so sind die Verbindungs-  
linien je zweier entsprechender Ecken parallel.

82.\* *Subtraction.* — Aus 1) folgt:

$$2) \quad ac - bc = ab.$$

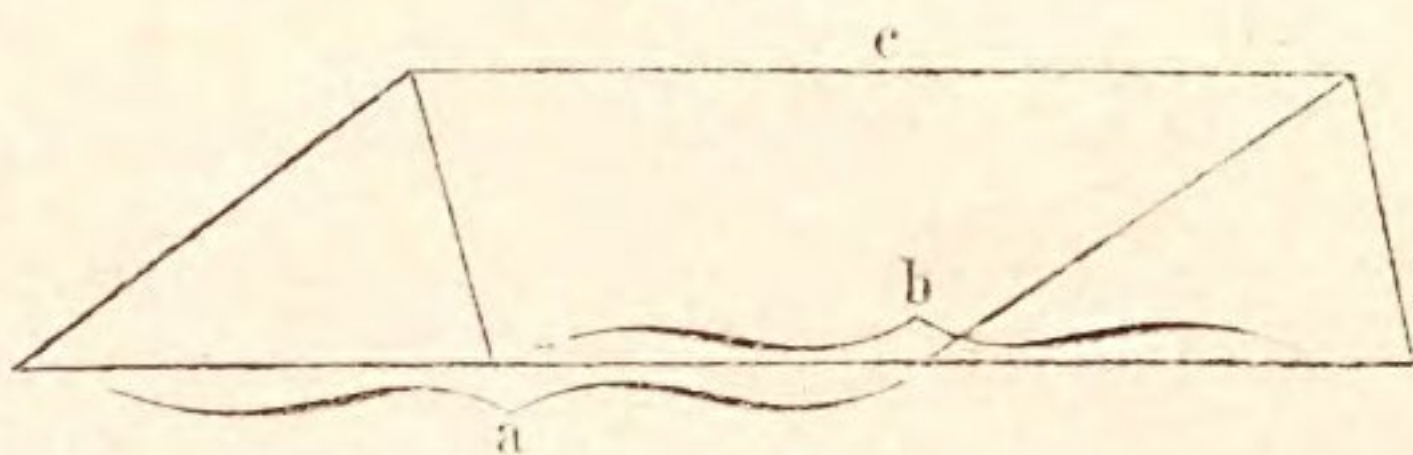


Demnach ist  $ab$  die Differenz zwischen  $ac$  und  $bc$ , und Fig. 46 liefert die Regel:

Soll man ein Parallelogramm von einem anderen 139. mit gleicher Grundlinie subtrahiren, so legt man sie so *auf* einander, dass ihre ersten Grundlinien zusammenfallen. Dann ist ihre Differenz das Parallelogramm zwischen ihren anderen Grundlinien.

Sind die durch Subtraction zu vereinigenden Parallelogramme flächengleich, so fallen [nach Formel 2)] auch ihre zweiten Grundlinien zusammen; d. h.: die beiden Parallelogramme liegen zwischen denselben Parallelen. Umgekehrt ist die Lage zwischen denselben Parallelen für Parallelogramme mit gleichen Grundlinien ein Zeichen ihrer Flächengleichheit. Nennt man die Entfernung der beiden Grundlinien eines Parallelogramms seine Höhe, so kann man dieses Resultat (da Parallelogramme mit gleicher Höhe immer zwischen dieselben Parallelen gebracht werden können) auch in der Form aussprechen:

Fig. 47.



Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und 140. Höhe sind flächengleich.

Ueberträgt man den Ausdruck „Grundlinie“ vom Parallelogramm auf eins der beiden durch die Diagonale entstandenen Dreiecke, so folgt aus 131:

Jedes Dreieck ist halb so gross als ein Paralle- 141. logramm mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Und aus 140:

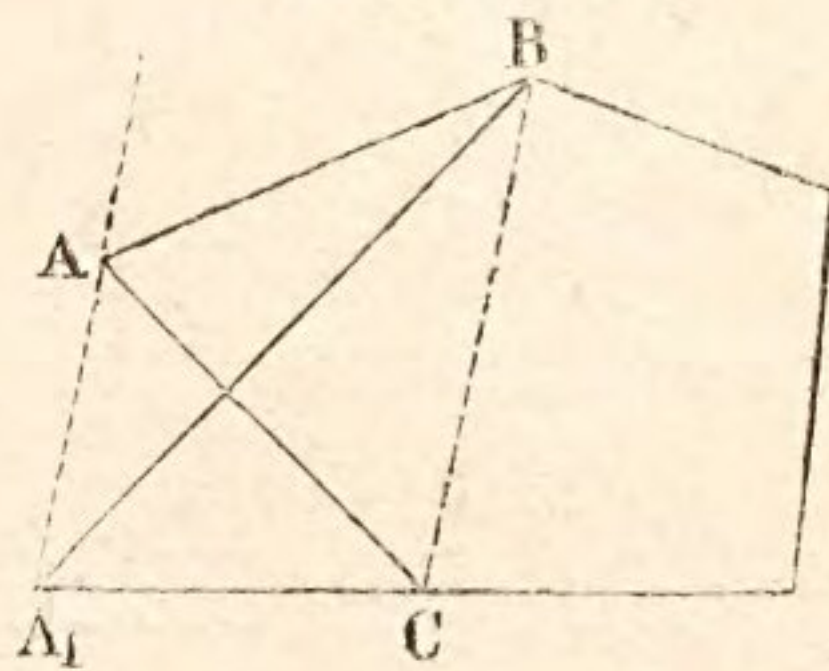
Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind 142. flächengleich.

Die Sätze 140 und 142 dienen zur Lösung folgender Aufgaben:

Aufgabe 7. — Ein gegebenes Vieleck in ein anderes, flächengleiches zu verwandeln, welches eine Seite weniger enthält.

Man schneidet durch eine Diagonale  $BC$  ein Dreieck  $ABC$  ab, und bestimmt den Punkt  $A_1$ , in welchem die durch  $A$  zu  $BC$  gezogene Parallele von der Verlängerung einer der anstossenden Polygonseiten geschnitten wird. Verbindet man dann  $A_1$  mit  $B$ , so hat das Polygon, welches statt  $A$

Fig. 48.





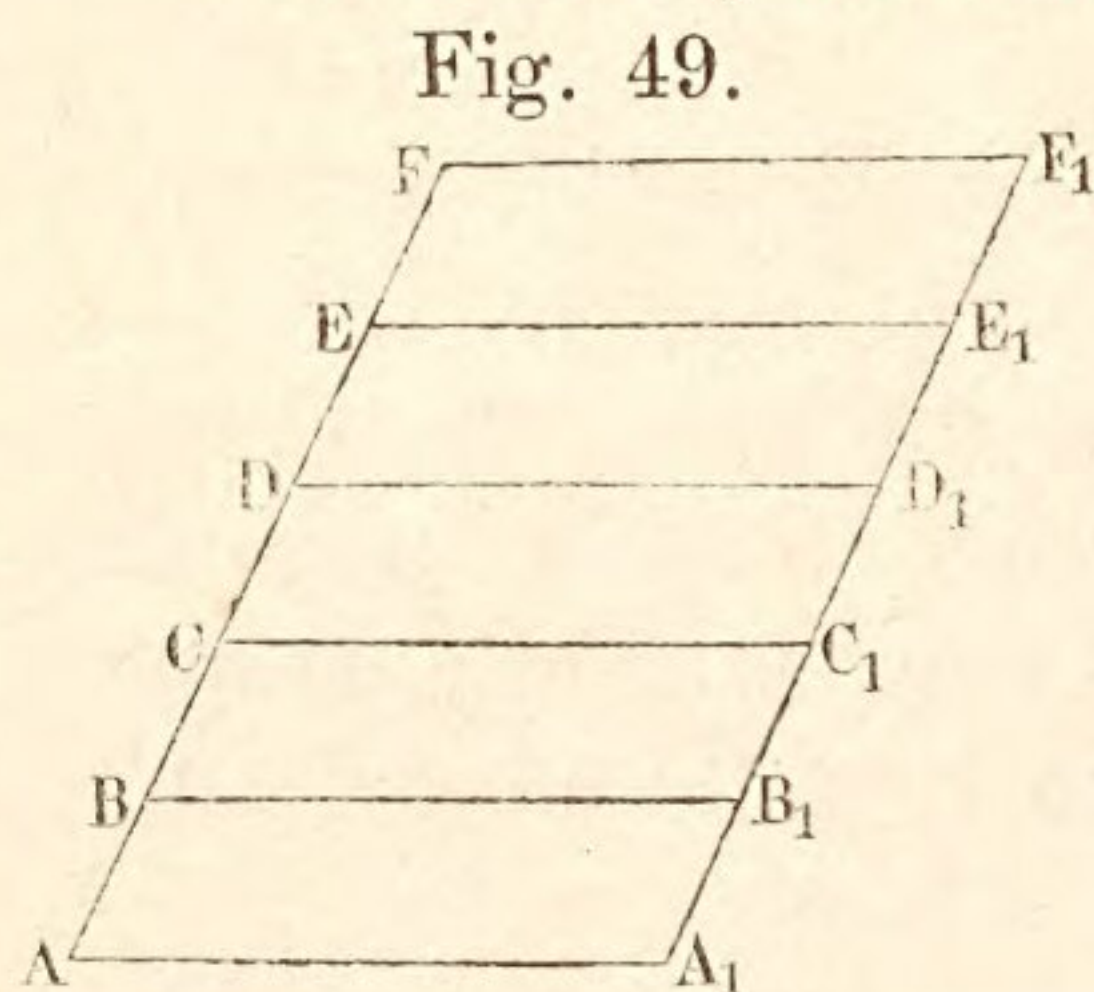
die Ecke  $A_1$  enthält, eine Ecke ( $C$ ) weniger und ist dem gegebenen flächengleich, weil  $\overline{ABC} = \overline{A_1BC}$  (142).

Anm. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man ein Vieleck in ein Dreieck verwandeln.

Aufgabe 8. — Ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Man bestimme die Punkte, in welchen eine (verlängerte) Grundlinie durch die in den Endpunkten der anderen errichteten Senkrechten geschnitten wird. Das entstandene Rechteck ist dann mit dem gegebenen Parallelogramm flächengleich nach 140.

**83.\* Multiplication.** — Addirt man (nach 138)  $n$  congruente



Parallelogramme ( $\overline{AA_1B_1B} = a$ ), so liegen ihre Ecken (nach 67 und 60) auf zwei Geraden ( $AF$  und  $A_1F_1$ ), und es entsteht ein Parallelogramm ( $\overline{AA_1F_1F} = b$ ), welches  $n$ -mal so gross ist als jedes der gegebenen. Durch diese Construction ist also das letztere ( $a$ ) mit  $n$  multiplicirt, und man hat

$$3) \quad n \cdot a = b.$$

Da ferner  $AF = n \cdot AB$ , so hat  $b$  eine  $n$ -mal so grosse Seitenlinie als  $a$ , und, wenn man  $AA_1$  als Grundlinie betrachtet, eine  $n$ -mal so grosse Höhe als  $a$ . Hieraus folgt der Satz:

143. Parallelogramme (oder Dreiecke) mit gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

Betrachtet man  $AF$  als Grundlinie von  $b$  und  $AB$  als Grundlinie von  $a$ , so haben beide Parallelogramme, da sie zwischen denselben Parallelen liegen, gleiche Höhe, und der vorige Satz lautet jetzt:

144. Parallelogramme (oder Dreiecke) mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Aus 141 folgt in Verbindung mit 143 oder 144:

145. Jedes Dreieck ist gleich einem Parallelogramm von gleicher Grundlinie und halber Höhe, oder von halber Grundlinie und gleicher Höhe.

Aus 145 folgt die Lösung der

Aufgabe 9. — Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Man ziehe durch den Halbirungspunkt  $D$  einer Seite  $AB$  die Strecke  $DE \parallel BC$  und verbinde  $E$  mit  $C$ .



Anm. Es sind verschiedene Lösungen möglich, da jedes durch  $D$  und  $B$  (oder  $A$ ) gezogene Parallelenpaar zusammen mit  $DB$  und der durch  $C$  zu  $AB$  gezogenen Parallelen ein Parallelogramm bestimmt, welches der Forderung genügt. — Wie verwandelt man hiernach das Dreieck unmittelbar in ein Rechteck?

Da man nach Aufg. 7 jedes Vieleck in ein Dreieck, nach Aufg. 9 jedes Dreieck in ein Parallelogramm, und nach Aufg. 8 jedes Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln kann, so kann hiernach jedes Vieleck in ein Rechteck verwandelt werden.

*Theilung.* — Aus 3) folgt:

$$4) \frac{b}{n} = a.$$

Da die Strecke  $AF$  durch die Punkte  $B, C, \dots$  in ebensoviele gleiche Theile getheilt wird, wie das Parallelogramm  $AA_1F_1F$  durch die Strecken  $BB_1, CC_1, \dots$ , so kann man ein gegebenes Parallelogramm in  $n$  gleiche Theile theilen, indem man (nach Anm. zu 33) eine Seite desselben in  $n$  gleiche Theile zerlegt und durch die Theilpunkte Parallelen zu den anstossenden Seiten zieht.

84.\* *Messung.* — Aus 3) folgt ferner:

$$5) \frac{b}{a} = n;$$

d. h.: Der Quotient zweier Parallelogramme (also überhaupt zweier geradliniger Figuren) ist eine Zahl.

Durch die Sätze 143 und 144 ist die Messung von Parallelogrammen mit gleicher Grundlinie oder Höhe auf die Messung von Strecken (s. Nr. 20) zurückgeführt; es bleiben also auch alle dort gemachten Bemerkungen über die Masszahl  $n$  in Kraft.

Um zwei beliebige Parallelogramme durch einander zu messen, nehmen wir an, eine Strecke  $m$  sei in der Grundlinie des ersten  $p$ -mal, in der des zweiten  $q$ -mal enthalten, und eine Strecke  $m_1$  in der Höhe des ersten  $p_1$ -mal, in der des zweiten  $q_1$ -mal. Dann verhalten sich die Grundlinien wie  $\frac{p}{q}$ , die Höhen wie  $\frac{p_1}{q_1}$ . — Zieht man nun durch die Theilpunkte der Grundlinien Parallelen zu den anstossenden Seiten, so zerfällt das erste Parallelogramm in  $p$  gleiche Theile (a), das zweite in  $q$  gleiche Theile (b). Dann verhält sich nach 143



$$\frac{a}{b} = \frac{p_1}{q_1};$$

also

$$\frac{pa}{qb} = \frac{pp_1}{qq_1};$$

147. d. h.: Parallelogramme (oder Dreiecke) verhalten sich wie die Producte aus den Masszahlen von Grundlinie und Höhe.

Anm. 140 ist in 143 und in 144, 143 und 144 sind in 147 als specielle Fälle enthalten.

Setzt man in 5)  $a = 1$ , so wird  $b = n$ , d. h. auch eine Zahl. Setzt man also irgend ein bestimmtes Parallelogramm gleich 1, so kann man alle Parallelogramme (und geradlinigen Figuren) als Zahlen darstellen. Weiteres hierüber s. in dem Abschnitt über rechnende Geometrie.

## 2. Entgegengesetzte Seiten eines Parallelogramms.

85.\* Ein Parallelogramm  $ab$ , dessen Grundlinien  $a$  und  $b$  sind, kann sowohl durch Verschiebung der Strecke  $a$  nach  $b$ , wie durch Verschiebung von  $b$  nach  $a$  entstehen. Da diese beiden Verschiebungen nach entgegengesetzten Seiten stattfinden, so hat jedes Parallelogramm (wie die ganze Ebene, in der es liegt) zwei entgegengesetzte Seiten, die durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben ( $ab$  und  $ba$ ) unterschieden werden können.

Anm. Da man die Verschiebung der durch  $a$  oder  $b$  bestimmten Geraden als Drehung um ihren unendlich fernen Punkt ansehen kann, so ist diese ganze Betrachtung als specieller Fall in Nr. 41—43 enthalten.

86.\* *Positive und negative Parallelogramme.* — Man kann den Gegensatz zwischen positiven und negativen Zahlen dadurch auf Parallelogramme (und andere Figuren) übertragen, dass man (wie schon in Nr. 42) die eine der beiden Seiten der Ebene, sowie alle durch Verschiebung nach dieser Seite entstandenen Parallelogramme als positiv, die andere Seite und die durch Verschiebung nach derselben entstandenen Parallelogramme als negativ betrachtet. Wird die Verschiebung von  $a$  nach  $b$  (Fig. 46) als positiv betrachtet, so ist die von  $b$  nach  $a$  negativ, und

$$ab = -ba \text{ oder } ab + ba = 0.$$

148. 87.\* *Erweiterungen.* — 1) Sind in der Ebene drei gleiche parallele Strecken  $a, b, c$  gegeben (Fig. 46), so ist (nach gleichem Verfahren, wie in Nr. 23 und Nr. 44) stets



$$ab + bc + ca = 0,$$

welche der drei Strecken auch zwischen den anderen liege.

Sind zwei anstossende Parallelogramme, die zusammen ein drittes Parallelogramm bilden, flächengleich (Fig. 49,  $\overline{AA_1B_1B}$  und  $\overline{BB_1C_1C}$ ), so heisst die Grenzlinie ( $BB_1$ ) die Mittellinie des dritten Parallelogramms ( $\overline{AA_1C_1C}$ ). Die Mittellinie eines Parallelogramms theilt also dasselbe in zwei flächengleiche Parallelogramme.

2) Es seien die Parallelogramme, die von den Seiten  $a, b, c$  eines Dreiecks bei drei aufeinanderfolgenden Verschiebungen beschrieben werden, mit  $a_1b_1c_1, a_2b_2c_2, a_3b_3c_3$  bezeichnet, so ist, wenn das Dreieck durch die dritte Verschiebung in seine alte Lage zurückgekehrt ist:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0; & (a_1 + b_1 + c_1 &= 0); \\ (b_1 + b_2 + b_3 &= 0); & a_2 + b_2 + c_2 &= 0; \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0; & a_3 + b_3 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ist nun  $a_3 = 0, b_2 = 0$  (Fig. 50), so folgt:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0; & a_2 + c_2 &= 0; \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0; & b_3 + c_3 &= 0 \\ \hline a_2 + b_3 + c_2 + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

oder, da  $c_2 + c_3 = -c_1$  und  $a_2 = -a_1$  ist:

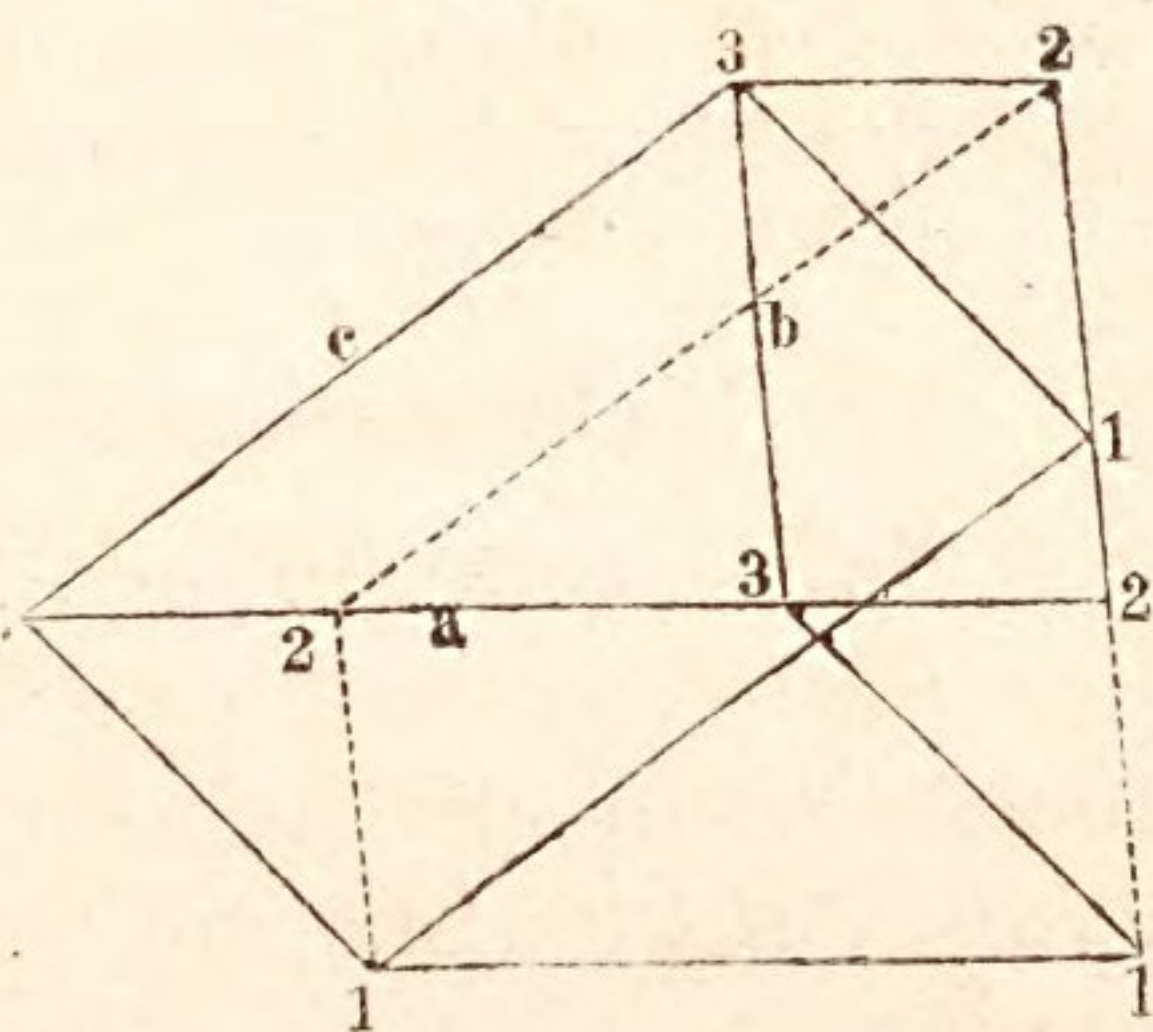
$$-a_1 + b_3 = c_1.$$

Sucht man in der Figur die Parallelogramme  $-a_1 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b_3 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  und  $c_1 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  auf, so enthält die letzte Formel den

Satz des *Pappus*:\*) Construirt man über einer Dreiecksseite ( $c$ ) als Grundlinie ein Parallelogramm, zieht durch die Ecken der gegenüberliegenden Grundlinie Parallelen zu den beiden andern Seiten, und construirt über jeder dieser Seiten ein Parallelogramm, dessen Gegenseite in der zugehörigen Parallele liegt, so ist das erste Parallelogramm gleich der Summe der beiden andern.

Ist insbesondere die erste Bewegung gleich  $c$ , die zweite gleich  $a$ , die dritte gleich  $b$  (sodass jede Ecke des Dreiecks ein ihm selbst congruentes Dreieck beschreibt), so sind die Parallelogramme  $c_1, a_2, b_3$  Rhomben; und, wenn das gegebene

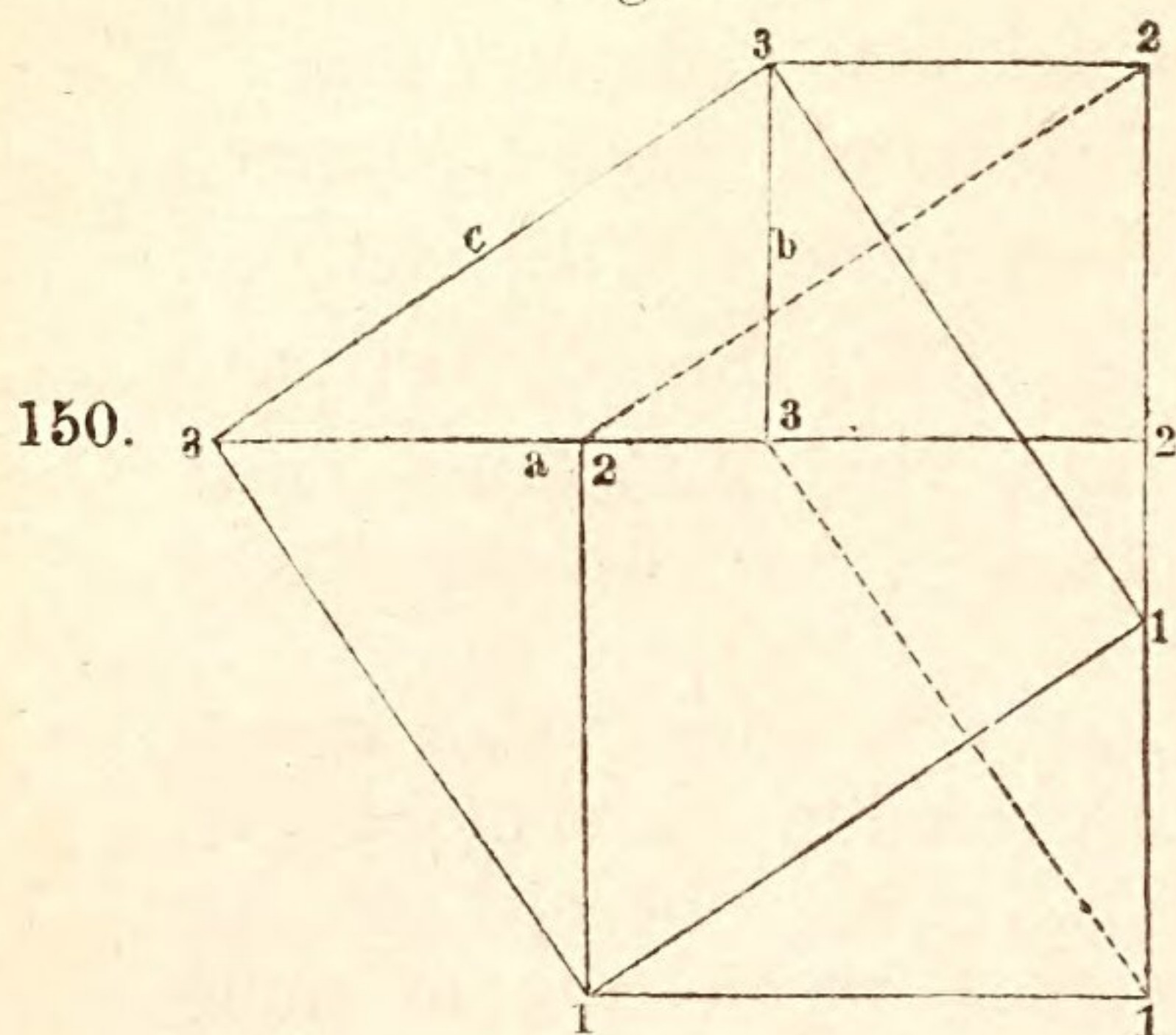
Fig. 50.



\*) Pappus aus Alexandrien (gegen 400 n. Chr.).



Fig. 51.



Dreieck rechtwinklig, und  $c_1$  ein Quadrat ist, so sind auch  $a_2$  und  $b_3$  Quadrate, und die Formel

$$a_2 + b_3 = c_1$$

enthält den

Satz des *Pythagoras*:\*) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Anm. Die zur Ableitung von 149 und 150 nöthigen vereinfachten Formeln kann man auch unmittelbar aus 138 und 140 entnehmen. Die Richtigkeit der

Sätze ergibt sich dann leicht durch Betrachtung der Figuren.

Die Bewegung des Parallelogramms in der Ebene, welche hier folgen müsste, wird ihrer geringeren Wichtigkeit wegen übergangen. Sie kann in ähnlicher Weise wie die Bewegung der Strecke auf der Geraden untersucht werden.\*\*)

## 2) Richtungsänderung der Strecke. — Die Kreisfläche.

88. Dreht eine Strecke  $OA$  sich um einen ihrer Endpunkte  $O$ , so beschreibt sie eine Figur, welche Kreisfläche heisst, wenn die Strecke eine ganze Umdrehung macht, Kreisausschnitt (Sector), wenn die Drehung diese Grösse nicht erreicht. — Die Kreisfläche ist vollständig begrenzt durch die Kreislinie, der Kreisausschnitt durch einen Bogen und zwei Radien.

Wenn die Strecke  $OA$  den Sector  $\widehat{AOB}$  beschreibt, so sagt man, der Centriwinkel  $AOB$  und der Bogen  $\widehat{AB}$  gehören zum Sector  $\widehat{AOB}$ .

Anm. Ebenso wie durch 2 Radien  $OA$  und  $OB$  zwei verschiedene Centriwinkel  $AOB$  entstehen, ein concaver und ein convexer, so auch zwei verschiedene Sektoren  $\widehat{AOB}$ , von denen jeder einen der beiden Centriwinkel enthält. Als Grenzlinie der Kreisfläche heisst die Kreislinie auch Peripherie.

Da der Sector durch dieselbe Bewegung entsteht wie der Bogen, so kann er unter denselben Voraussetzungen wie dieser als Mass für die Drehung der Strecke betrachtet werden.

\*) Pythagoras aus Samos (570—471), griechischer Mathematiker und Philosoph.

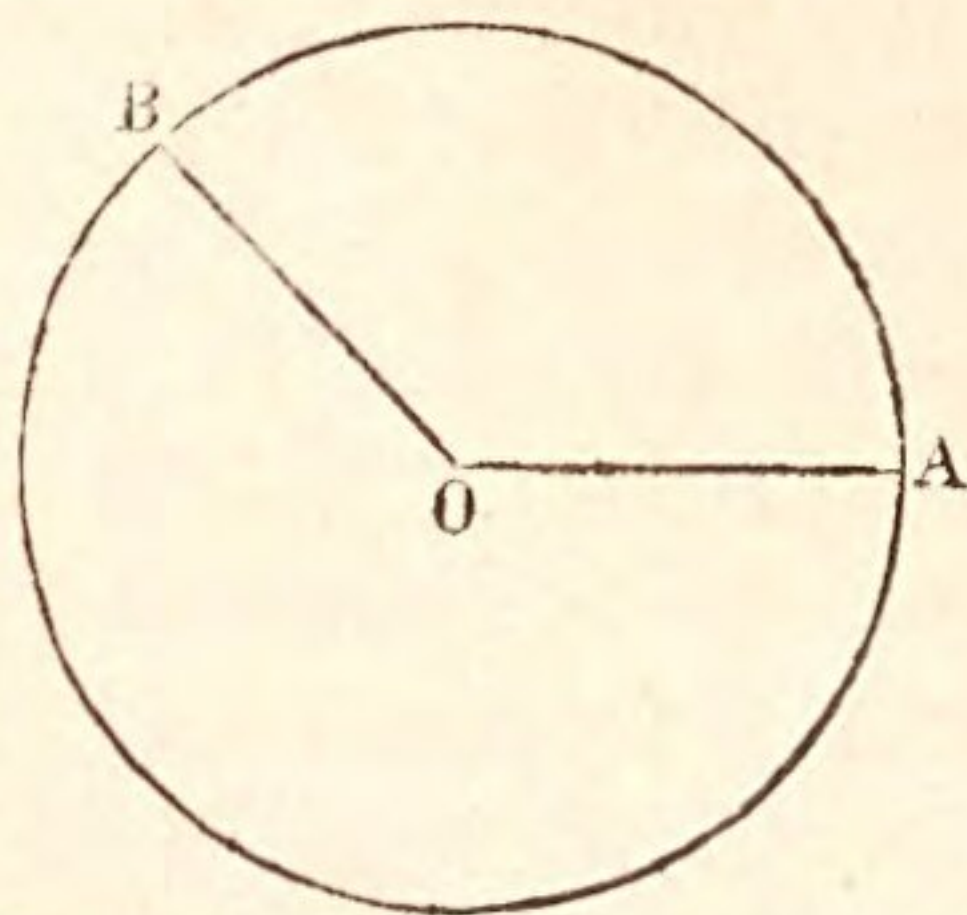
\*\*) Vgl. des Vf. System der Raumlehre, Th. I, Nr. 56—63.



Hiernach können alle Sätze, welche von Winkeln mit demselben Scheitel gelten, auf Sektoren derselben Kreisfläche übertragen werden, indem man statt der Winkel die zugehörigen Sektoren setzt.

Da Sector und Centriwinkel in gleicher Weise die Drehung einer Geraden messen, so sind die beiden Sektoren, welche eine Strecke durch zwei gleich grosse Drehungen beschreibt, einander gleich; d. h.:

Fig. 52.



Zu gleichen Centriwinkeln einer Kreisfläche gehören gleiche Sektoren (und umgekehrt). — Zu dem grösseren von zwei Centriwinkeln einer Kreisfläche gehört der grössere Sector (und umgekehrt). 151.

Aus 151 folgt:

Jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gehende Gerade halbirt die Kreisfläche. — Zwei solche Linien, die auf einander senkrecht stehen, theilen die Kreisfläche in vier gleiche Theile. 152.

Anm. Kreislinie und Kreisfläche werden auch unter der gemeinsamen Benennung „Kreis“ zusammengefasst. Entsprechendes gilt von den Ausdrücken „Halbkreis“ und „Quadrant“. — Bei geradlinigen Figuren ist die Aufstellung unterscheidender Namen für Umfang und Fläche nicht nöthig, weil der Umfang aus geraden Strecken besteht, deren Eigenschaften schon früher betrachtet wurden. Dagegen stellt sich die Kreislinie als neues Gebilde der Geraden gegenüber, und muss in dieser Eigenschaft einen besonderen Namen führen.

Wir betrachten nun den Kreis der Reihe nach in Verbindung mit den übrigen Gebilden: Punkt, Gerade (Strecke, Winkel), Figur.

**89. Kreis und Punkt.** — Ein Punkt kann auf oder ausserhalb der Kreislinie liegen. Im zweiten Falle kann er wieder auf oder ausserhalb der Kreisfläche liegen. Verbindet man in jedem der hieraus folgenden 3 verschiedenen Fälle den Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ergibt sich aus unmittelbarer Anschauung der Satz:

Ein Punkt liegt innerhalb der Kreisfläche, auf der Kreislinie oder ausserhalb der Kreisfläche, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte kleiner, gleichgross oder grösser als der Radius des Kreises ist (und umgekehrt). 153.

Anm. Specieller Fall: Der Mittelpunkt selbst, mit der Entfernung 0.



**90. Kreis und Gerade.** —  $\alpha$ ) *Secanten.* — Da durch zwei Punkte einer Kreislinie auch eine Gerade bestimmt ist, so sieht man zunächst, dass eine Gerade und eine Kreislinie zwei gemeinsame Punkte haben können.

Da nach Anm. zu 116 drei Punkte auf einer Geraden nicht gleichen Abstand von einem ausserhalb derselben liegenden Punkte haben können, während drei Punkte einer Kreislinie stets gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, so können drei Punkte einer Geraden nicht gleichzeitig Punkte einer Kreislinie sein; d. h.:

154. Eine Kreislinie kann von einer Geraden nicht in mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

Eine Gerade, welche die Kreislinie in zwei Punkten schneidet, heisst *Secante*, der von den Schnittpunkten begrenzte Theil der Secante: *Sehne*, und jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne: *Durchmesser* des Kreises.

Hieraus folgt:

Der Durchmesser ist doppelt so gross als der Radius.

Jede Sehne theilt die Kreisfläche in zwei Figuren, welche *Kreisabschnitte* (*Segmente*) heissen. Ein Segment ist vollständig begrenzt durch einen Bogen und eine Sehne. Durch die Verbindungslinie der Endpunkte zweier Radien

wird der eine Sector als Summe, der andere als Differenz eines Segmentes und eines gleichschenkligen Dreiecks dargestellt.

Anm. Die Fläche des Halbkreises ist gleichzeitig Sector und Segment. Warum?

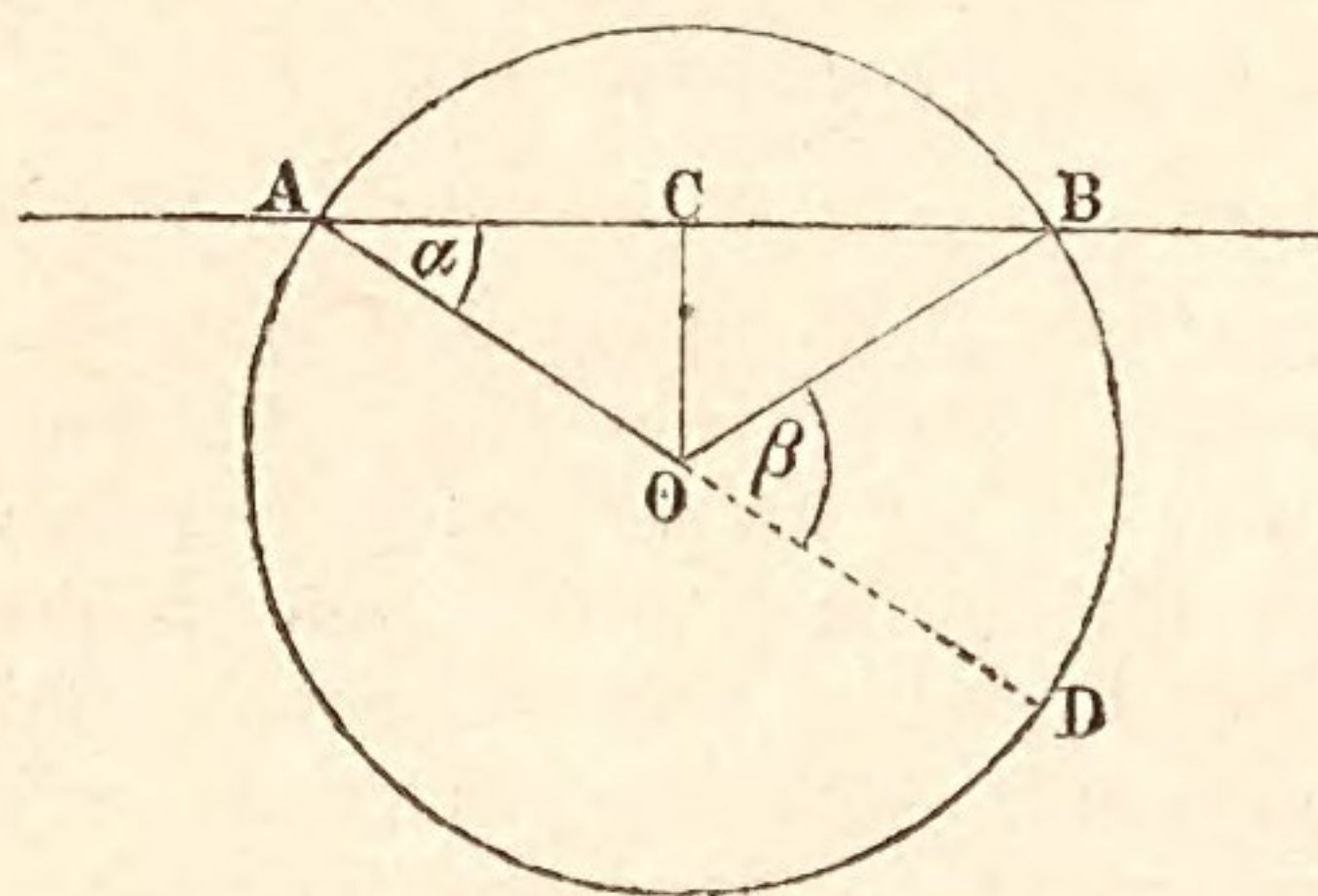
Die *Sehne* bildet mit den nach ihren Endpunkten gezogenen Radien ein gleichschenkliges Dreieck. Giebt man den Ecken, Winkeln und Seiten dieses Dreiecks die Namen, welche diese Gebilde in Bezug auf den Kreis führen, so lautet Satz 99 mit seinen Umkehrungssätzen:

156. Die Halbirungslinie eines Centriwinkels steht senkrecht auf der zugehörigen Sehne und halbirt dieselbe.

157. Umkehrungssätze: Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Sehne und halbirt den Centriwinkel.

Fig. 53.

155.





Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises eine 158. Senkrechte auf eine Sehne, so halbiert diese die Sehne und den Centriwinkel.

Errichtet man auf einer Sehne in ihrer Mitte 159. eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises (119).

Nach 114 ist in Fig. 53  $OC < OA$ ; d. h.:

Der Abstand einer Secante vom Mittelpunkte des 160. Kreises ist kleiner als der Radius.

Und umgekehrt:

Eine Gerade schneidet den Kreis in zwei Punk- 161. ten, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius.

Dreht sich das Dreieck  $AOB$  um den Mittelpunkt  $O$  bis  $A_1OB_1$ , so beschreiben die Punkte  $A$  und  $B$  gleiche Bogen der Kreislinie. Es ist dann gleichzeitig  $AB = A_1B_1$ ,  $AOB = A_1OB_1$ , und, wenn  $C_1$  die Mitte von  $A_1B_1$  ist:  $OC = OC_1$ . D. h.:

Zu gleichen Bogen einer Kreislinie gehören 162. gleiche Sehnen.

Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen 163. Abstand vom Mittelpunkte (und umgekehrt).

Anm. Andre Beweise: Zu 162 mittelst 41 und 91; zu 163 mittelst 105 und 156. — Wieviele Bogen gehören zu einer Sehne? Wie muss demnach die Umkehrung von 162 ausgesprochen werden?

**91. Peripheriewinkel.** — Wenn eine Secante ( $AB$ , Fig. 53) sich um einen ihrer Schnittpunkte ( $A$ ) dreht, so beschreibt sie einen Winkel ( $BAD$ ), dessen Scheitel auf der Peripherie der Kreisfläche liegt, und dessen Schenkel durch zwei Sehnen ( $AB$  und  $AD$ ) gebildet werden. Dieser Winkel heisst Peripheriewinkel.

Der andere Schnittpunkt der Secante ( $B$ ) beschreibt einen Bogen ( $\widehat{BD}$ ), von dem man sagt, dass der Peripheriewinkel zu ihm gehört.

Ein Peripherie- und ein Centriwinkel gehören zu einander, wenn sie beide zu demselben Bogen gehören.

Verlängert man in Fig. 53  $AO$  bis  $D$ , so ist  $BOD$  Aussenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks  $BOA$ , folglich nach 101

$$\beta = 2\alpha.$$

Sei  $AB_1$  eine zweite aus  $A$  gezogene Sehne,  $\alpha_1$  der Winkel, welchen diese Sehne, und  $\beta_1$  der Winkel, welchen der



Radius  $OB_1$  mit dem Durchmesser  $AD$  bildet, so ist nach demselben Satze

$$\beta_1 = 2\alpha_1.$$

Daher, je nachdem  $AB_1$  mit  $AB$  auf derselben oder entgegengesetzter Seite des Durchmessers  $AD$  liegt (nach 44 und 45):

$$\beta \mp \beta_1 = 2(\alpha \mp \alpha_1)$$

oder in anderer Bezeichnung:

$$BOB_1 = 2 \cdot BAB_1;$$

164. d. h.: Ein Peripheriewinkel ist halb so gross als der zugehörige Centriwinkel.

Anm. Was für ein Peripheriewinkel gehört hiernach zu einem convexen, gestreckten, concaven Centriwinkel? Wie löst man hiernach am kürzesten die Aufgabe: Einen Winkel zu construiren, der halb so gross ist als ein gegebener? Specieil: Einen rechten Winkel zu construiren?

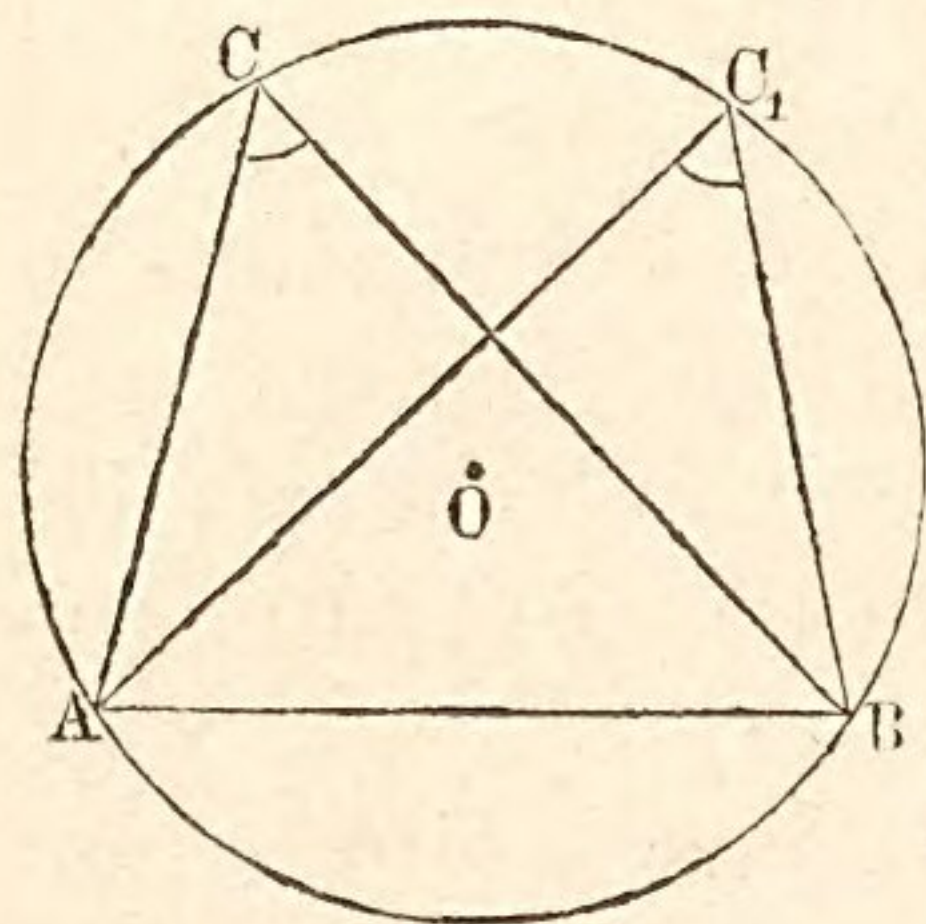
Aus 164 folgt:

165. Der Peripheriewinkel im Halbkreis (d. h. der zum H. gehört) ist ein Rechter.

Da zu einem gegebenen Bogen nur ein Centriwinkel gehört, dagegen unendlich viele Peripheriewinkel (nämlich alle, deren Scheitel auf dem entgegengesetzten Bogen liegen), so folgt aus 164:

- 166.

Fig. 54.



Alle Peripheriewinkel auf demselben (oder auf gleichen) Bogen (eines Kreises) sind einander gleich. — Zu dem grösseren von zwei Bogen gehört der grössere Peripheriewinkel (und umgekehrt).

Da alle diese Peripheriewinkel mit der zugehörigen Sehne Dreiecke bilden, welche in einer Seite ( $AB$ ) und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so hat man den Satz:

167. Ist zu einem Dreieck eine Seite und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke der entgegengesetzte Bogen des Kreises, welcher die Seite als Sehne und den Winkel als zugehörigen Peripheriewinkel enthält.

Anm. Der Mittelpunkt dieses Kreises wird am einfachsten gefunden, indem man an die Seite ( $AB$ ) in jedem ihrer Endpunkte den Complementwinkel des gegebenen Winkels ( $OAB = OBA$ ) anträgt. Denn es ist die Hälfte von  $AOB$  gleich dem Peripheriewinkel (164), und  $OAB = OBA$  das Complement dieser Hälfte (99).



Andere Sätze über den geometrischen Ort der Spitze eines Dreiecks.

Ist zu einem Dreieck eine Seite ( $a$ ) und die zugehörige 168. Mittellinie ( $t_1$ ) gegeben, so ist der geometrische Ort der dritten Ecke die mit der Mittellinie aus der Mitte der Seite beschriebene Kreislinie.

Ist zu einem Dreieck eine Seite ( $a$ ) und die zugehörige 169. Höhe ( $h_1$ ) gegeben, so ist der geometrische Ort der Spitze das in der Entfernung der Höhe zu der Seite gezogene Parallelenpaar.

Ist eine Seite  $a$  und eine nicht zugehörige Höhe  $h_2$  gegeben, so enthält das aus  $a$  als Hypotenuse und  $h_2$  als Kathete construirte rechtwinklige Dreieck den Winkel  $\gamma$ . Dieser Fall ist also auf 86 zurückgeführt.

Für das rechtwinklige Dreieck nimmt 167 die besondere Form an:

Der geometrische Ort der Spitze eines recht- 170. winkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse ist die über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Kreislinie.

In Fig. 54 ist  $\widehat{AC_1} > \widehat{AC}$ ,\*) folglich nach 41:  $\angle AOC_1 > \angle AOC$ ; ferner nach 123 in den Dreiecken  $\triangle AOC$  und  $\triangle AOC_1$ :  $AC_1 > AC$ ; d. h.:

Zu dem grösseren von zwei Bogen einer Kreis- 171. linie gehört die grössere Sehne.

Da in Fig. 54  $\widehat{AC_1} > \widehat{AC}$  und  $\widehat{BC_1} < \widehat{BC}$  ist, so ist nach 171:  $AC_1 > AC$  und  $BC_1 < BC$ ; d. h.:

Sind in zwei Dreiecken eine Seite und der gegen- 172. überliegende Winkel gleich, die zweiten Seiten aber ungleich, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere dritte Seite hat, die kleinere zweite Seite.

Für das rechtwinklige Dreieck nimmt 172 die besondere Form an:

Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der 173. Hypotenuse überein, so hat dasjenige Dreieck, welches die grössere erste Kathete hat, die kleinere zweite Kathete.

Aus  $\widehat{AC_1} > \widehat{AC}$  und  $\widehat{BC_1} < \widehat{BC}$  folgt ferner nach 166:  $\angle ABC_1 > \angle ABC$  (und  $\angle BAC_1 < \angle BAC$ ); d. h., da gleichzeitig  $AC_1 > AC$  (und  $BC_1 < BC$ ) ist:

Sind in zwei Dreiecken eine Seite und der ge- 174. genüberliegende Winkel gleich, die einen anliegen-

\*) Hier wie im Folgenden ist unter dem zwischen zwei Punkten einer Kreislinie liegenden Bogen nur der kleinere der beiden hierdurch bestimmten Bogen zu verstehen. Welche Aenderungen erleidet Satz 171, wenn einer oder beide Bogen anders bestimmt werden?



den Winkel aber ungleich, so hat dasjenige Dreieck, welches den grösseren anliegenden Winkel hat, auch die grössere ihm gegenüberliegende Seite (und umgekehrt).

Für das rechtwinklige Dreieck nimmt 174 die besondere Form an:

175. Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse überein, so hat dasjenige Dreieck, welches den grösseren ersten anliegenden Winkel hat, auch die grössere ihm gegenüberliegende Kathete.

Sind  $AB$  und  $A_1B_1$  zwei ungleiche Sehnen eines Kreises mit dem Mittelpunkte  $O$ ,  $C$  und  $C_1$  ihre Mitten, so ist, wenn  $AB > A_1B_1$ , auch  $AC > A_1C_1$ ; ferner  $OC < OC_1$  (173); d. h.:

176. Die grössere von zwei Sehnen eines Kreises hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkte (und umgekehrt).

Aus der Umkehrung von 176 folgt:

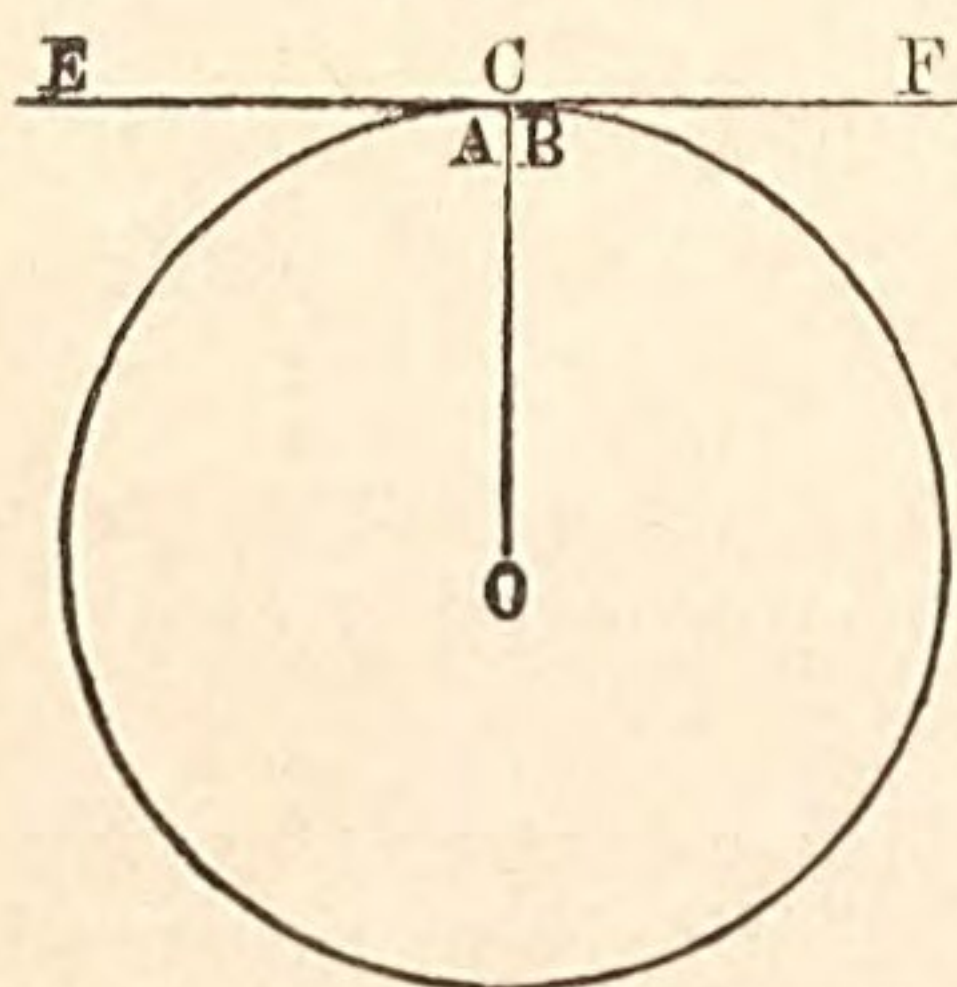
177. Unter allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser die grösste.

Zwei zu entgegengesetzten Bogen einer Kreislinie gehörige Centriwinkel betragen zusammen  $4R$ ; mithin die zugehörigen Peripheriewinkel  $2R$  (164); d. h.:

178. Zwei Peripheriewinkel auf entgegengesetzten Bögen betragen zusammen  $2R$ . (Fig. 56:  $BCA + BC_1A = 2R$ .)

**92.  $\beta$ ) Tangenten.** — Wenn eine Secante  $AB$  (Fig. 53) sich so verschiebt, dass ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser wird, so wird die auf ihr liegende Sehne  $AB$  kleiner (176); d. h. ihre Endpunkte  $A$  und  $B$  nähern sich einander. — Wenn endlich  $A$  und  $B$  zusammenfallen, so geht die Secante in eine Gerade über, welche mit der Kreislinie zwei zusammenfallende, d. h. nur einen Punkt gemeinsam hat.

Fig. 55.



Eine Gerade, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam hat, heisst Tangente. Man sagt, sie berühre den Kreis in dem gemeinsamen Punkte (Berührungspunkte).

Mit den beiden Endpunkten der Sehne ( $A$ ,  $B$ ) fällt auch ihr Mittelpunkt ( $C$ ) zusammen; d. h. die Strecke  $OC$  ist Radius. Und da  $OC$  beständig auf der Secante senkrecht steht, also ihren Abstand vom Mittelpunkte des Kreises angiebt, so folgt weiter:



Der Abstand einer Tangente vom Mittelpunkte 179. des Kreises ist gleich dem Radius.

Und umgekehrt:

Eine Gerade berührt den Kreis in einem Punkte, 180. wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangente in einem gegebenen Punkte  $C$  der Kreislinie. Man verbinde  $O$  mit  $C$  und errichte in  $C$  die Gerade  $EF \perp OC$ .

Eine Gerade hat keinen Punkt mit dem Kreise 181. gemeinsam, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkte grösser ist als der Radius. (114, 153)

Da die Tangente nur ein specieller Fall der Secante ist, nämlich eine Secante, deren beide Schnittpunkte in einen Punkt zusammenfallen, so liefert jeder Satz über eine Secante einen entsprechenden über eine Tangente. Aus den Umkehrungssätzen zu 156 folgt hiernach:

Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit 182. dem Berührungspunkte einer Tangente, so steht dieser Radius auf der Tangente senkrecht.

Fällt man vom Mittelpunkte eines Kreises eine 183. Senkrechte auf eine Tangente, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt.

Errichtet man auf einer Tangente in ihrem Be- 184. rührungspunkte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises.

Ferner aus 166:

Ein Peripheriewinkel zwischen Sehne und Tangente ist gleich jedem Peripheriewinkel auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen. (Fig. 56:  $BAD = BCA$ ;  $BAD_1 = BC_1A$ .)

Anm. Der Winkel  $BAD$  steht auf dem Bogen  $\widehat{BC_1A}$ , weil, wenn  $BA$  durch Drehung um  $A$  den Winkel  $BAD$  beschreibt, der Punkt  $B$  den Bogen  $\widehat{BC_1A}$  zurücklegt. — Zwei Sehnen bilden nur einen, eine Sehne und eine Tangente dagegen zwei Peripheriewinkel. — In welchen bekannten Satz geht hiernach 178 über?

Sind in zwei Punkten ( $A, B$ ) einer Kreislinie Tangenten construiert, die sich in  $C$  schneiden (Fig. 57), so ist

Fig. 56.

185.

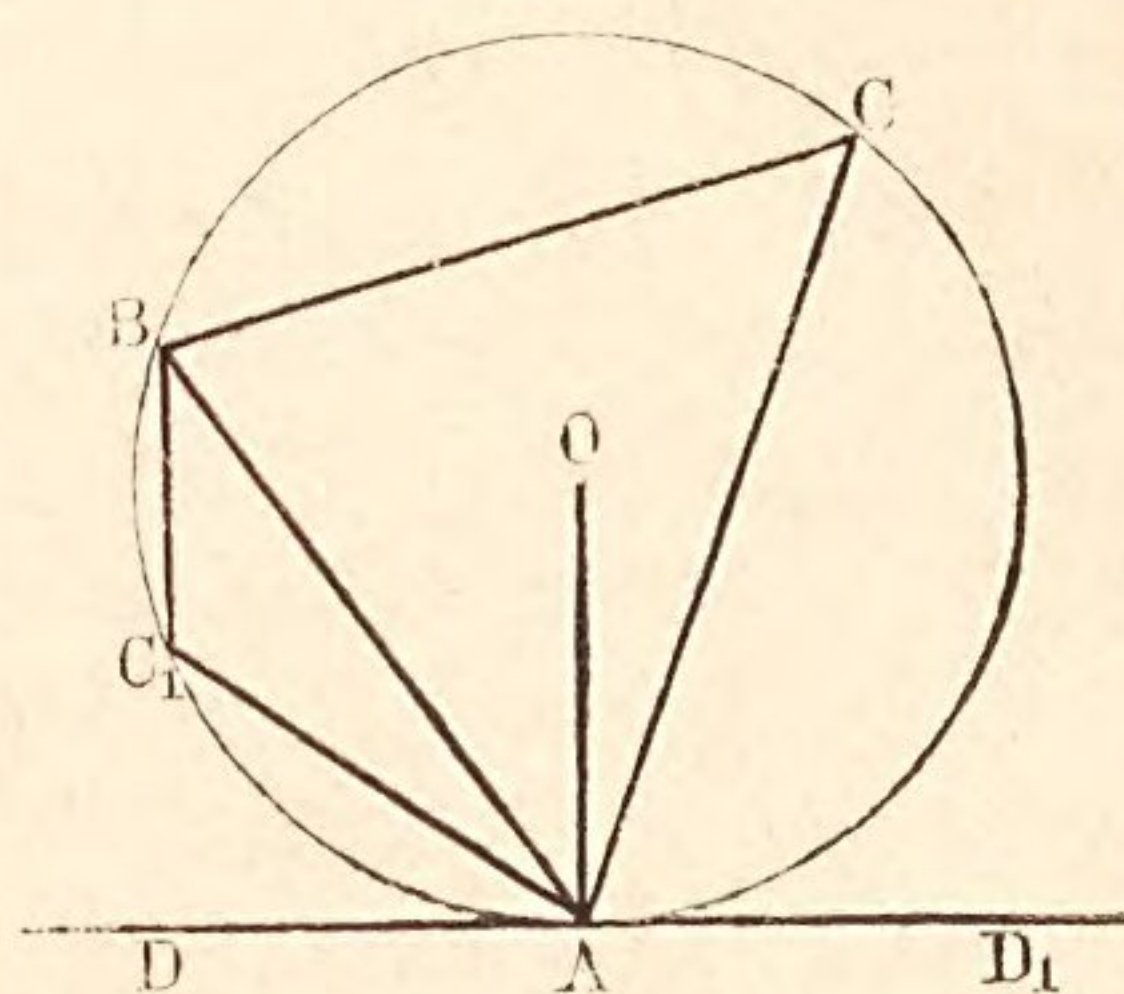
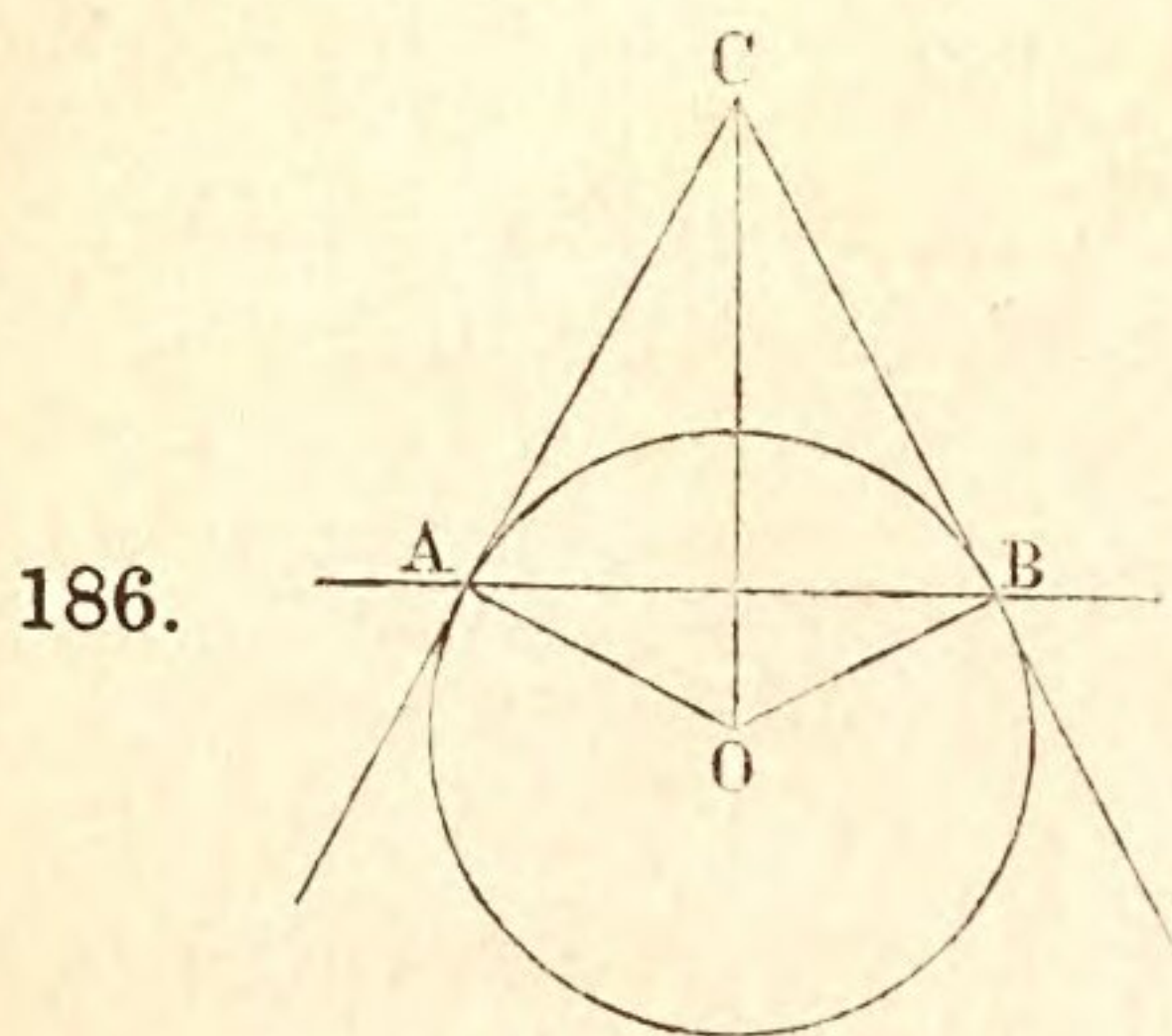




Fig. 57.



$$CAO = CBO \text{ (182);}$$

$$BAO = ABO \text{ (98);}$$

folglich durch Subtraction:

$$CAB = CBA;$$

folglich

$$CA = CB \text{ (Umk. z. 98);}$$

d. h.: Durch einen ausserhalb der Kreisfläche liegenden Punkt kann man zwei Tangenten ziehen, welche (bis zu den Berührungspunkten gerechnet) einander gleich sind.

Anm. Die Construction der Tangenten, welche durch einen ausserhalb liegenden Punkt  $C$  gehen sollen, kommt zurück auf die Bestimmung der Berührungspunkte  $A$  und  $B$ . Dieselben sind aber bestimmt durch zwei geometrische Oerter; der erste ist die gegebene Kreislinie, der zweite die über  $CO$  als Durchmesser beschriebene Kreislinie (170). Beide Kreislinien schneiden sich in  $A$  und  $B$ .

Ist  $C$  in unendliche Entfernung gerückt, d. h. sollen die Tangenten einer gegebenen Geraden parallel sein, so verwandelt sich der zweite geometrische Ort in die durch  $O$  gehende, auf der gegebenen Geraden senkrecht stehende Gerade. — Rückt  $C$  auf  $OC$  bis auf die Kreislinie, so fallen beide Tangenten zusammen.

Da nun über  $AB$  zwei gleichschenklige Dreiecke ( $ACB$  und  $AOB$ ) construirt sind, so folgt aus 106:

187. Der Winkel zweier Tangenten wird durch die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Mittelpunkte des Kreises halbart.

Und umgekehrt:

188. Die Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden geht durch den Mittelpunkt des die Geraden berührenden Kreises.

**93.\* Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt.** — Wenn der Radius  $OA$  (Fig. 57) einer Kreislinie sich nach  $OB$  dreht, während die Tangente in  $A$  beständig auf dem Radius senkrecht steht, also Tangente bleibt, so sagt man, die Tangente drehe sich um den Mittelpunkt des Kreises. — Eine Gerade dreht sich also um einen ausserhalb liegenden Punkt ( $O$ ), wenn sie sich so bewegt, dass ihre Entfernung ( $OA$ ) von diesem Punkte beständig dieselbe bleibt. — Da hiernach die Bewegung der Geraden  $AC$  durch die Drehung der Strecke  $OA$  vollkommen bestimmt ist, so bleibt der Punkt  $A$ , wie alle Punkte der Geraden  $AC$ , beständig in gleicher Entfernung von  $O$ ; d. h.: Dreht sich eine Gerade um einen anssehalb



liegenden Punkt, so beschreibt jeder ihrer Punkte einen Kreisbogen. Die Gerade selbst beschreibt bei einer vollen Umdrehung die ganze Ebene, mit Ausnahme der von  $OA$  beschriebenen Kreisfläche. Die Kreislinie, als Grenze der Kreisfläche, entsteht also ebensowohl durch Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt, wie durch Bewegung eines Punktes auf einer sich drehenden Geraden. Die Gerade kann also ebenso wie der Punkt als ein die Kreislinie erzeugendes Gebilde angesehen werden.

Anm. Betrachtet man einen Punkt  $A$  der Kreislinie als fest, den Mittelpunkt als beweglich, so nähert sich auch bei dieser Entstehungsweise die Kreislinie, wenn der Mittelpunkt sich ins Unendliche von  $A$  entfernt, einer Geraden, nämlich der Tangente in  $A$ , und, wenn der Mittelpunkt sich  $A$  bis ins Unendliche nähert (d. h. schliesslich mit  $A$  zusammenfällt), einem Punkte, nämlich dem Punkte  $A$  selbst (als Schnittpunkt aller durch  $A$  gehenden Geraden. (Vgl. 74 und 75.)

Punkt und Gerade stehen also der Kreislinie gegenüber in dem Verhältniss der Reciprocität, welches in der Gegenüberstellung folgender bereits bekannter Sätze zum Ausdruck kommt:

Der Punkt kann als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden.

Durch einen Punkt der Kreislinie gehen zwei zusammenfallende Tangenten an dieselbe.

Eine Gerade schneidet die Kreislinie in 2, 1, 0 Punkten.

Die Gerade kann als specieller Fall der Kreislinie angesehen werden.

Eine Tangente schneidet die Kreislinie in zwei zusammenfallenden Punkten.

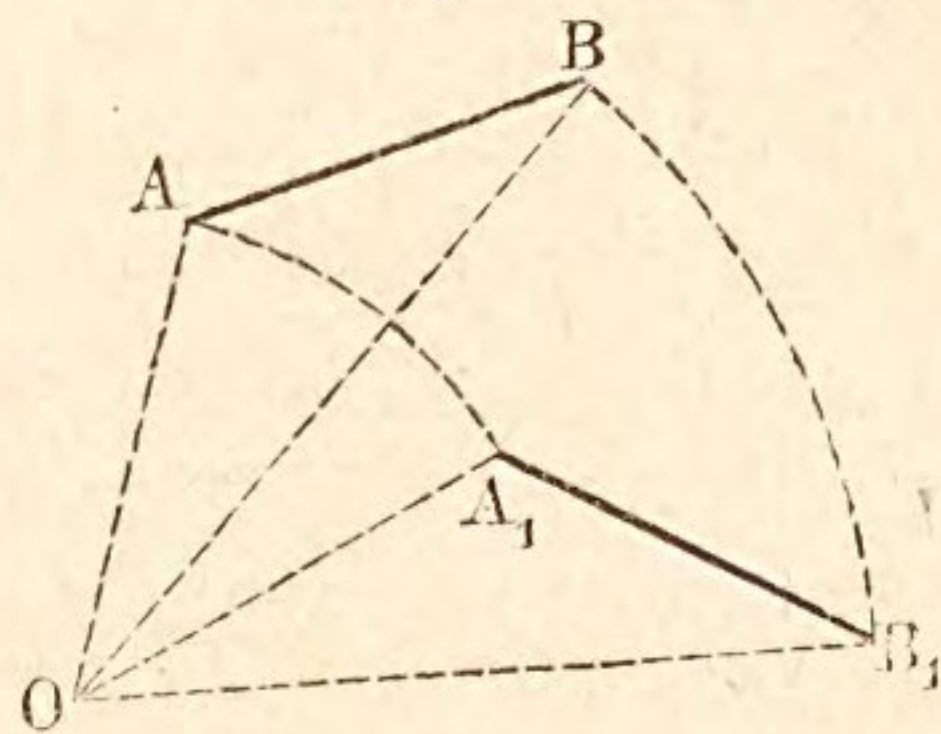
Von einem Punkte gehen an die Kreislinie 2, 1, 0 Tangenten.

Anm. Von der Gesamtheit der zu einer Kreislinie gehörigen Tangenten sagt man, dass sie die Kreisfläche umhüllen.

**94.\* Drehung einer Strecke um einen ausserhalb liegenden Punkt.** — Wenn durch Drehung einer Geraden um einen ausserhalb liegenden Punkt ( $O$ ) die auf der Geraden liegende Strecke  $AB$  in  $A_1B_1$  übergeht, so ist, wie oben bemerkt,  $OA = OA_1$  und  $OB = OB_1$ . Da hiernach die Dreiecke  $AOA_1$  und  $BOB_1$  gleichschenkelig sind, so gehen die in den Mitten von  $AA_1$  und  $BB_1$  errichteten Senkrechten durch  $O$  (119).

Ist  $AB$  Seite eines Polygons  $ABC\dots$ , welches durch Drehung um  $O$  in  $A_1B_1C_1\dots$  übergeht, so gehen aus demselben Grunde die in den Mitten von  $BC$  und  $B_1C_1$ ,  $CD$  und  $C_1D_1$  u. s. w. errichteten Senkrechten durch  $O$ . Man hat also den Satz:

Fig. 58.





189. Die in den Mitten der Verbindungsstrecken zweier homologer Ecken von 2 beliebigen congruenten Polygonen errichteten Senkrechten schneiden sich in einem einzigen Punkte, dem Drehungspunkte.

Anm. Sind je zwei homologe Seiten der Polygone parallel, so liegt der Drehungspunkt in unendlicher Entfernung, und die Drehung verwandelt sich in eine Verschiebung.

Wenn insbesondere das Dreieck  $\overline{OAB}$  (Fig. 58) sich um die Ecke  $O$  bis  $OA_1B_1$  dreht, so ist  $AOB = A_1OB_1$ ; also auch  $AOA_1 = BOB_1$ ; d. h.:

190. Dreht eine Strecke ( $AB$ ) sich um einen ausserhalb liegenden Punkt ( $O$ ), so beschreiben die Verbindungsstrecken des Drehungspunktes mit ihren Endpunkten gleiche Winkel.

Von selbst klar ist die Erweiterung dieses Satzes:

191. Dreht eine Figur sich um irgend einen Punkt, so beschreiben ihre Seiten gleiche Winkel. Denn durch Drehung einer einzigen Seite ist die Drehung der ganzen Figur vollkommen bestimmt.

Anm. Beschreibt ein Dreieck  $ABC$  um die Mitte  $O$  einer seiner Seiten  $AB$  einen gestreckten Winkel, so sind die Seiten des neuen Dreiecks denen des ersten entgegengesetzt gerichtet (191), und es fällt  $A$  mit  $B_1$ ,  $B$  mit  $A_1$  zusammen. Die beiden Dreiecke bilden also ein Parallelogramm, und da  $OA = OA_1$ , und  $OC$  gleich und entgegengesetzt gerichtet ist mit  $OC_1$ , so folgt hieraus der Satz 133.

**95. Construction eines Kreises aus gegebenen Bedingungen.** — *Vorbemerkung.* — Von einem Kreise ist die Grösse und Gestalt bestimmt, wenn man seinen Radius, und die Lage, wenn man seinen Mittelpunkt kennt. Zur Bestimmung des letzteren sind zwei geometrische Oerter erforderlich. Man kann solche Oerter finden, wenn man die Bedingung stellt, dass die Kreislinie durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Geraden berühren soll. (Andere Bedingungen werden später hinzugefügt werden. S. Nr. 106.) Demnach sind Radius, Punkt der Kreislinie und Tangente die zur Bestimmung des Mittelpunktes eines Kreises dienenden Elemente.\*)

Ist der Mittelpunkt eines Kreises bestimmt, so kennt man auch den Radius (wenn er nicht schon unter den gegebenen Elementen war); nämlich entweder als Verbindungsstrecke des

---

\*) Punkte und Geraden sind natürlich stets in fester Lage auf der Ebene gegeben, der Radius dagegen nur nach seiner Grösse, ebenso wie die zu den früher betrachteten Dreiecksconstructionen nöthigen Stücke.



Mittelpunktes mit einem gegebenen Punkte der Kreislinie, oder als Senkrechte, die vom Mittelpunkte auf eine gegebene Tangente gefällt wird.

Ist zur Construction eines Kreises nur eine Bedingung gegeben, so kann jeder Punkt der Ebene Mittelpunkt eines Kreises werden, welcher dieser Bedingung genügt. — Sind zwei Bedingungen gegeben, so existirt für den Mittelpunkt des Kreises ein geometrischer Ort. Bezeichnet man Punkte, durch welche die Kreislinie gehen soll, durch  $A, B, \dots$ , Geraden, welche sie berühren soll, durch  $a, b, \dots$ , den Radius durch  $r$ , so sind folgende Zusammenstellungen von je zweien dieser Gebilde möglich: 1)  $AB$ , 2)  $Ar$ , 3)  $Aa$ , 4)  $ab$ , 5)  $ar$ . Im dritten Fall ist zu unterscheiden, ob der Punkt  $A$  auf der Geraden  $a$  liegt oder nicht; im vierten, ob die Geraden  $a$  und  $b$  parallel sind oder sich schneiden.

**96. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises.** — 1) Gegeben  $A, B$ . Jeder Punkt  $O$ , der von  $A$  und  $B$  gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Daher folgt aus 120:

Soll eine Kreislinie *durch zwei gegebene Punkte gehen*, 192. so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Verbindungsstrecke der Punkte in ihrer Mitte errichtete Senkrechte.

Anm. Man zeichne hier, wie in den folgenden Fällen, eine Anzahl Kreise, die den beiden Bedingungen genügen, und achte darauf, welcher Kreis in eine gerade Linie oder in einen Punkt ausartet. Die den geometrischen Ort bildenden Linien mögen jedesmal punktirt gezeichnet werden.

2) Gegeben  $A, r$ . Jeder Punkt  $O$ , der von  $A$  um die Strecke  $r$  entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Daher folgt aus der Erklärung der Kreislinie:

Soll eine Kreislinie *mit gegebenem Radius durch einen gegebenen Punkt gehen*, 193. so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit dem Radius aus dem Punkte beschriebene Kreislinie.

3a) Gegeben  $A, a$ ; der Punkt liegt auf der Geraden. Jeder Punkt  $O$ , der von  $A$  und  $a$  gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Diese Eigenschaft haben aber alle Punkte der auf  $a$  in  $A$  errichteten Senkrechten (113 und 114). Folglich:

Soll eine Kreislinie *eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren*, 194. so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die auf der Geraden in dem Punkte errichtete Senkrechte.



Anm. 194 folgt auch als specieller Fall aus 192. — Liegt der Punkt nicht auf der Geraden ( $B$ ,  $a$ ), so ist der geometrische Ort weder eine Gerade, noch eine Kreislinie, sondern eine andere krumme Linie, die später betrachtet wird (Nr. 177).

4a) Gegeben  $a, b$ ; die Geraden sind parallel. Jeder Punkt  $O$ , der von  $a$  und  $b$  gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Da nun zwei Parallelen überall gleichweit von einander entfernt sind, so wird eine dritte, in der Mitte zwischen  $a$  und  $b$  gezogene Parallele die Eigenschaft haben, dass jeder ihrer Punkte von  $a$  und  $b$  gleichweit entfernt ist. Also:

195. Soll eine Kreislinie *zwei Parallelen berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die von beiden gleichweit entfernte Parallele.

Anm. Man beachte, dass durch  $a$  und  $b$  auch der Radius der Kreislinie gegeben ist.

4b) Gegeben  $a, b$ ; die Geraden schneiden sich. Jeder Punkt  $O$ , der von  $a$  und  $b$  gleichweit entfernt ist, kann Mittelpunkt sein. Daher folgt aus 122:

196. Soll eine Kreislinie *zwei sich schneidende Geraden berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das Geradenpaar, welches die Winkel der Geraden halbirt.

Anm. Inwiefern ist 195 ein specieller Fall von 196? Wo bleibt die zweite Gerade?

5) Gegeben  $a, r$ . Jeder Punkt  $O$ , der von  $a$  den Abstand  $r$  hat, kann Mittelpunkt sein. Da diese Punkte auf beiden Seiten von  $a$  liegen können, so folgt (ähnlich wie in 4a):

197. Soll eine Kreislinie *mit gegebenem Radius eine gegebene Gerade berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes das in der Entfernung des Radius zu der Geraden gezogene Parallelenpaar.

97. *Sätze von 3 Linien, die durch denselben Punkt gehen.* — Sind zur Construction eines Kreises drei Bedingungen gegeben, so liefern je zwei davon einen geometrischen Ort für den Mittelpunkt. Man erhält also drei geometrische Oerter. Da nun der Mittelpunkt gleichzeitig auf allen dreien liegen muss, so gehen die drei Oerter stets durch denselben Punkt. Aus jeder derartigen Constructionsaufgabe geht also ein Satz hervor, welcher aussagt, dass drei Linien durch denselben Punkt gehen. Diese Sätze sind zum Theil schon bekannt (aus *Aar* folgt z. B. 183, aus *ABr* 119), zum Theil (wenn  $B$  und  $a$  zwei der gegebenen Stücke sind) lassen sie sich noch nicht aufstellen. Am wichtigsten sind die Fälle *ABC* und *abc*.



Anm. Man erhält einen Mittelpunkt (also eine Lösung der Aufgabe), wenn die beiden geometrischen Oerter Geraden sind, zwei, wenn der eine eine Gerade, der andere ein Geradenpaar oder eine Kreislinie ist, vier, wenn beide Oerter Geradenpaare oder Kreislinien sind. Da aber eine Kreislinie von einer andern nur in zwei Punkten, oder auch gar nicht, und von einer Geraden ebenfalls nicht immer geschnitten wird, so wird hierdurch die Anzahl der Lösungen eingeschränkt.

Betrachtet man die Punkte  $A, B, C$  als Ecken eines Dreiecks, so erhält man den Satz:

Die in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden sich in *einem* Punkte. 198.

Betrachtet man die Geraden  $a, b, c$  als Seiten eines Dreiecks, so folgen die Sätze:

Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in *einem* Punkte. 199.

Die Halbirungslinien zweier Aussenwinkel und des dritten Innenwinkels in einem Dreieck schneiden sich in *einem* Punkte. 200.

Da (nach Anm. zu 122) jede Halbirungslinie eines Innenwinkels auf derjenigen des zugehörigen Aussenwinkels senkrecht steht, so sind die Strecken  $A_1A, B_1B, C_1C$  (Fig. 59) die Höhen des Dreiecks  $A_1B_1C_1$ . Daraus folgt der Satz:

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in *einem* Punkte. 201.

Anm. Zieht man noch durch die Ecken des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten, so bilden dieselben ein drittes Dreieck, in welchem (nach Anm. zu Aufg. 6, S. 68)  $A_1, B_1, C_1$  die Mitten der Seiten, und  $A_1A, B_1B, C_1C$  die in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten sind. Hieraus folgt wieder 198.

**98. Kreis und Figur.** — Liegen die Eckpunkte einer Figur auf einer Kreislinie, so sagt man, die Figur sei dem Kreise einbeschrieben (Sehnenfigur), und der Kreis der Figur umbeschrieben (Umkreis). Die Ecken der Figur sind vom Mittelpunkte des Umkreises gleichweit entfernt. — In einen gegebenen Kreis wird eine Figur beschrieben, indem man Punkte der Kreislinie der Reihe nach verbindet. Damit um eine gegebene Figur ein Kreis beschrieben werden könne, muss ein Punkt existiren, der von den Eckpunkten der Figur gleichweit entfernt ist.

Anm. In welcher Beziehung stehen Seiten und Winkel einer Figur zum Umkreise?

Sind die durch die Seiten einer Figur bestimmten Geraden Tangenten einer Kreislinie, so sagt man, die Figur sei dem Kreise umbeschrieben (Tangentenfigur). Der Kreis heisst



der Figur einbeschrieben (Inkreis), wenn er innerhalb der Figur liegt, anbeschrieben (Ankreis), wenn ausserhalb. Inkreis und Ankreis heissen zusammen Berührungskreise. Die Seiten der Figur sind vom Mittelpunkte eines Berührungskreises gleichweit entfernt. — Um einen gegebenen Kreis wird eine Figur beschrieben, indem man in Punkten der Kreislinie Tangenten zieht. Damit in oder an eine gegebene Figur ein Kreis beschrieben werden könne, muss ein Punkt existiren, der von den Seiten der Figur gleichweit entfernt ist.

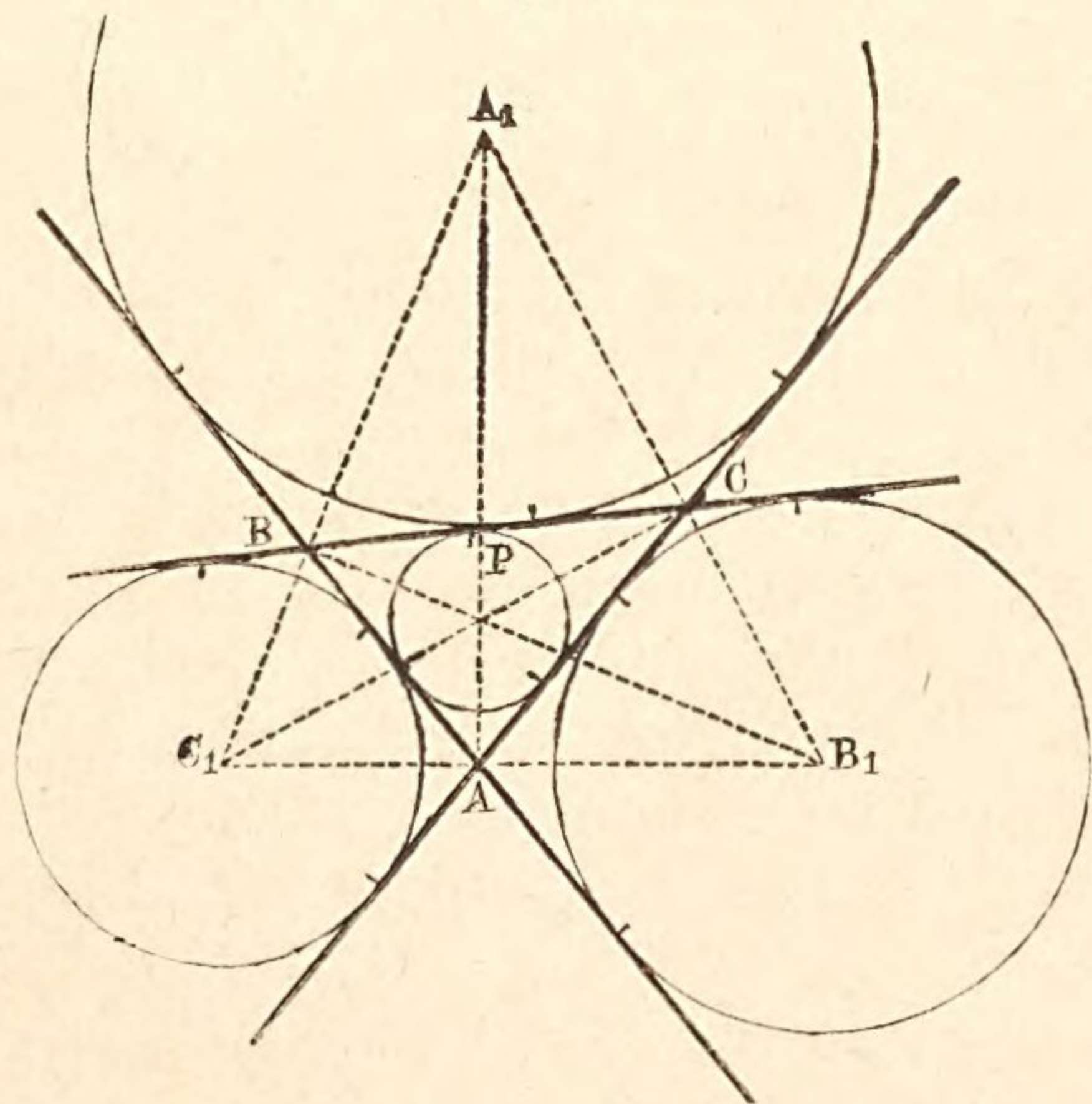
Anm. Wo liegen die Berührungspunkte beim Inkreise, wo beim Ankreise?

**99. Dreieck.** — Nach 198 und 192 giebt es für jedes Dreieck einen Punkt, der von seinen Ecken, und nach 199, 200 und 196 vier Punkte (die Schnittpunkte zweier Geradenpaare), die von seinen Seiten gleichweit entfernt sind. Man kann daher sagen:

202. Jedes Dreieck hat einen Umkreis und vier Berührungskreise.

Anm. Wo liegt der Mittelpunkt des Umkreises im spitzwinkligen, rechtwinkligen, stumpfwinkligen Dreieck? Wann sind zwei oder drei Berührungskreise gleich gross? Unter welchen Winkeln schneiden sich die Winkelhalbirenden eines Dreiecks?  $\left(R \pm \frac{\alpha}{2}, R \pm \frac{\beta}{2}, R \pm \frac{\gamma}{2}\right)$ .

Fig. 59.



Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks  $\overline{ABC}$  mit  $a, b, c$ , sodass  $AB = c, BC = a, CA = b$  ist; ferner die aus den Ecken des Dreiecks  $A, B, C$  an den Inkreis gehenden Tangentenstrecken bzw. mit  $p_1, p_2, p_3$ , so ist

$$1) \begin{cases} a = p_2 + p_3 \\ b = p_3 + p_1 \\ c = p_1 + p_2. \end{cases}$$

Wird endlich der Umfang des Dreiecks gleich  $2p$  gesetzt, also

$$2) p = \frac{a + b + c}{2},$$

so erhält man durch Addition der Formeln 1)



$$2p = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3$$

oder

$$3) \quad p = p_1 + p_2 + p_3,$$

woraus in Verbindung mit 1) weiter folgt:

$$4) \quad p - p_1 = a, \quad p - p_2 = b, \quad p - p_3 = c,$$

oder

$$5) \quad p_1 = p - a; \quad p_2 = p - b; \quad p_3 = p - c,$$

oder, mit Berücksichtigung von 2)

$$6) \quad p_1 = \frac{b + c - a}{2}; \quad p_2 = \frac{c + a - b}{2}; \quad p_3 = \frac{a + b - c}{2}.$$

Anm. Welche Sätze liegen in den Formeln 3), 5), 6)?

Bezeichnet man die aus  $B$  und  $C$  an den Berührungskreis  $A_1$  gezogenen Tangenten bzw. mit  $x_2$  und  $x_3$ , so ist

$$x_2 + x_3 = a.$$

Ferner sind die beiden aus  $A$  an denselben Kreis gezogenen Tangenten bzw. gleich  $c + x_2$  und  $b + x_3$ , ihre Summe ist also  $b + c + x_2 + x_3$  oder  $a + b + c$ . Da sie aber einander gleich sind, so ist jede von ihnen [nach 2)] gleich  $p$ . Man hat also den Satz:

Die aus einer Ecke eines Dreiecks an den gegenüberliegenden Ankreis gehende Tangentenstrecke ist gleich dem halben Umfang des Dreiecks.

Da, wie eben gefunden,

$$c + x_2 = p; \quad b + x_3 = p,$$

so ist

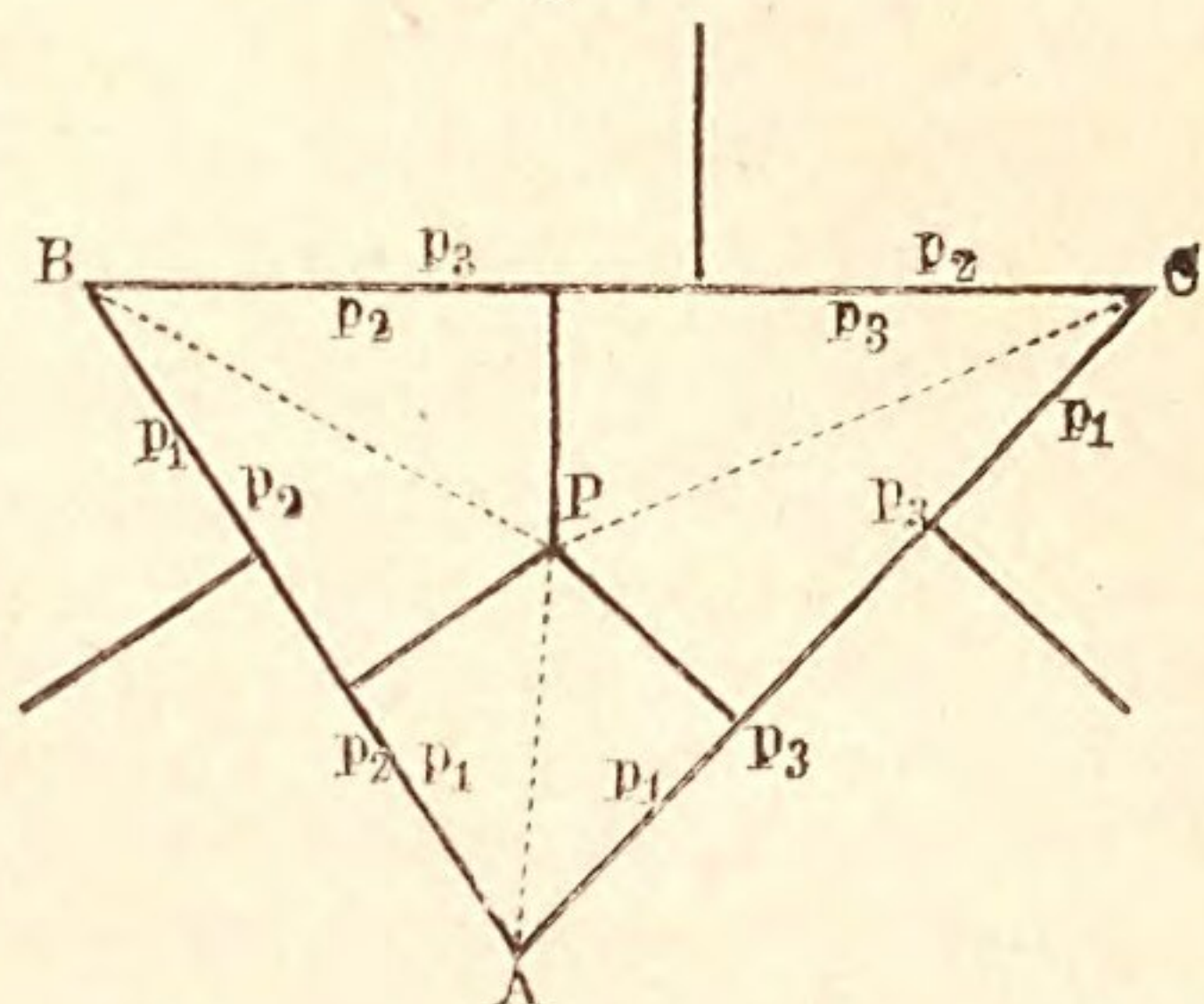
$$x_2 = p - c = p_3; \quad x_3 = p - b = p_2.$$

d. h.: Trägt man auf jeder Seite eines Dreiecks die beiden an den Inkreis gehenden Tangentenstrecken in umgekehrter Reihenfolge ab, so sind ihre Endpunkte die Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks von den drei Ankreisen berührt werden.

Ferner folgt aus 203:

Trägt man auf den Verlängerungen jeder Seite eines Dreiecks die aus der gegenüberliegenden Ecke an den Inkreis gehende Tangentenstrecke ab, so sind die Endpunkte die Punkte, in denen die Verlängerungen der Dreiecksseiten von den drei Ankreisen berührt werden!

Fig. 60.









Da die Seiten des regelmässigen Polygons vom Mittelpunkt  $O$  des umbeschriebenen Kreises gleichen Abstand haben (163), so ist  $O$  gleichzeitig Mittelpunkt eines dem Polygon eingeschriebenen Kreises, und man hat den Satz:

In jedes regelmässige Polygon kann ein Kreis beschrieben werden.

Da nach 41 die zu den Seiten eines regelmässigen Polygons gehörigen Centriwinkel ( $A_1OA_2$ ,  $A_2OA_3$ , ...) gleich sind, und nach 158 durch die Senkrechten  $OB_4$ ,  $OB_5$  ... halbiert werden, so sind auch alle diese halben Winkel einander gleich, und ebenso die Centriwinkel  $B_3OB_4$ ,  $B_4OB_5$ , ..., folglich auch die Bogen  $\widehat{B_3B_4}$ ,  $\widehat{B_4B_5}$ , ... Demnach theilen die Punkte, in welchen ein eingeschriebener Kreis die Seiten eines regelmässigen Polygons berührt, die Kreislinie in  $n$  gleiche Theile, und umgekehrt:

Theilt man eine Kreislinie in  $n$  gleiche Theile, 210. und zieht durch die Theilpunkte Tangenten, so entsteht ein dem Kreise umschriebenes regelmässiges  $n$ -Eck.

Da nach 187 die Winkel dieses Polygons durch die Strecken  $A_1O$ ,  $A_2O$ , ... halbiert werden, und einander gleich sind, so sind auch alle ihre Hälften unter einander gleich; folglich die Dreiecke  $OA_1A_2$ ,  $OA_2A_3$ , ... gleichschenkelig, und  $OA_1 = OA_2 = \dots$ . Der Punkt  $O$  hat also gleichen Abstand von allen Ecken des Polygons, und ist der Mittelpunkt eines demselben umschriebenen Kreises. Man hat also den Satz:

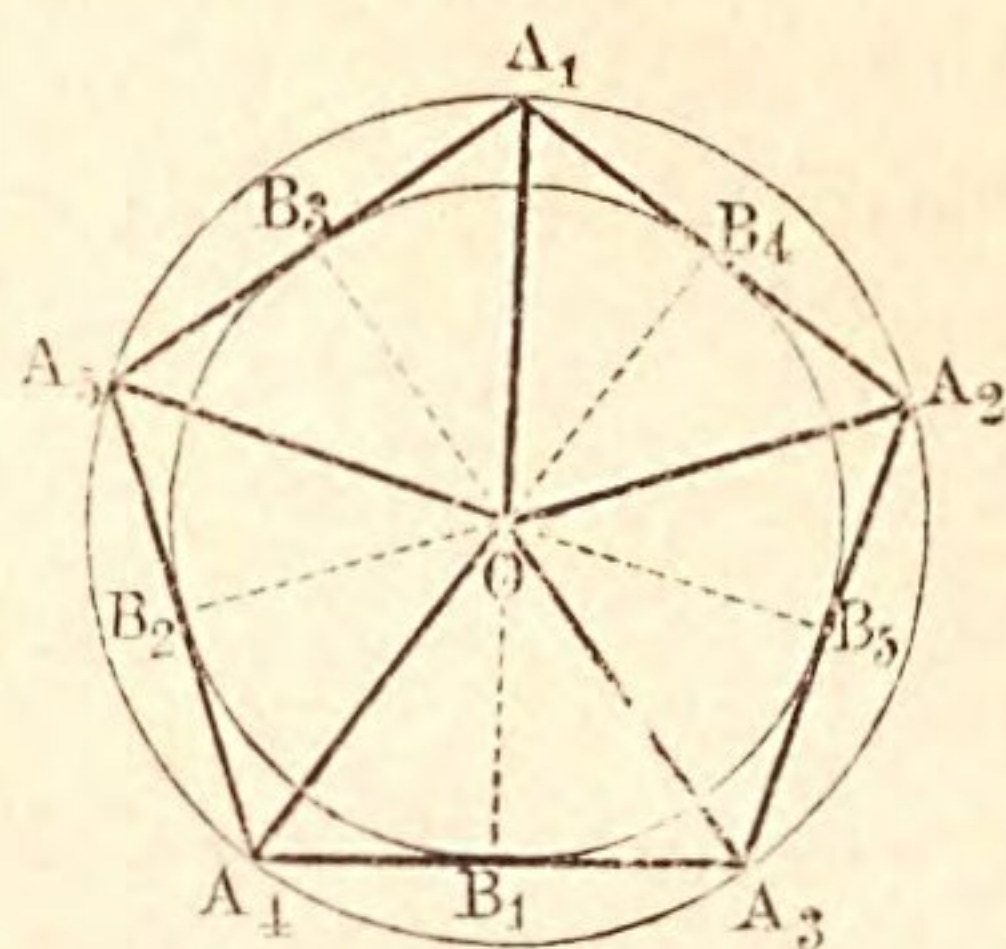
Um jedes regelmässige Polygon kann ein Kreis 211. beschrieben werden.

Der Radius des einem regelmässigen Polygon umschriebenen Kreises heisst grosser Radius, der des eingeschriebenen Kreises kleiner Radius, der gemeinsame Mittelpunkt beider Kreise Mittelpunkt des Polygons.

Aus Betrachtung der Fig. 61 ergeben sich weiter folgende Sätze:

Jedes regelmässige Polygon wird durch seine 212. grossen Radien in  $n$  congruente gleichschenkelige Dreiecke (*Bestimmungsdreiecke*), durch seine kleinen Radien in  $n$  congruente Vierecke, durch beide Gruppen

Fig. 61.



209.



von Radien zusammen in  $2n$  congruente rechtwinklige Dreiecke getheilt.

213. Jeder Centriwinkel des regelmässigen  $n$ -Ecks (Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks) beträgt  $\frac{4}{n}R$ .

214. Die Halbierungslinien der Winkel eines regelmässigen Polygons und die in den Mitten seiner Seiten errichteten Senkrechten gehen alle durch seinen Mittelpunkt.

Anm. Welches Dreieck, welches Viereck ist regelmässig? Wie gross ist der Winkel, den zwei benachbarte grosse oder kleine Radien, ein grosser und der benachbarte kleine bilden? Welche Eigenschaft haben die durch die kleinen Radien gebildeten Vierecke?

215. Jeder Winkel eines regelmässigen  $n$ -Ecks beträgt  $\frac{2n-4}{n}R$ . (83)

Ein regelmässiges Polygon ist durch sein Bestimmungsdreieck, oder durch seine Seitenzahl und den Radius des um- oder einbeschriebenen Kreises, oder durch drei seiner Eckpunkte vollkommen bestimmt.

Anm. Die Construction einzelner regelmässiger Polygone folgt in Nr. 156—161.

216. Die Halbierungslinien der Centriwinkel eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks bestimmen auf der Kreislinie  $n$  Punkte, welche zusammen mit den Ecken des gegebenen Polygons die Eckpunkte eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks sind (Fig. 62.)

217. Verbindet man (im umgekehrten Falle) die ungeraden Ecken (die 1<sup>te</sup>, 3<sup>te</sup>, 5<sup>te</sup> ...) eines regelmässigen  $2n$ -Ecks der Reihe nach, so erhält man ein regelmässiges  $n$ -Eck.

218. Die Verbindungslinien der Eckpunkte eines dem Kreise umbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks mit dem Mittelpunkte bestimmen auf der Kreislinie  $n$  Punkte, welche zusammen mit den Berührungspunkten des gegebenen Polygons die Berührungspunkte eines dem Kreise umbeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks sind (Fig. 63).

219. Verlängert man (im umgekehrten Falle) die ungeraden Seiten (die 1<sup>te</sup>, 3<sup>te</sup>, 5<sup>te</sup> ...) eines regelmässigen  $2n$ -Ecks, so bilden dieselben der Reihe nach die Seiten eines regelmässigen  $n$ -Ecks.



**102.\*** Nach 109 sind zwei benachbarte Seiten ( $A_1C$  und  $CA_2$ ) eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks zusammen grösser als eine Seite ( $A_1A_2$ ) des einbeschriebenen  $n$ -Ecks. Bezeichnet man diese Seiten bezw. mit  $s_n$  und  $s_{2n}$ , und die ganzen Umfänge der Figuren mit  $u_n$  und  $u_{2n}$ , so ist hiernach

$$2s_{2n} > s_n,$$

oder, mit  $n$  multiplicirt:

$$2n \cdot s_{2n} > n \cdot s_n;$$

d. h.:

$$u_{2n} > u_n;$$

d. h.: Der Umfang eines regelmässigen dem Kreise einbeschriebenen  $2n$ -Ecks ist grösser als der des einbeschriebenen  $n$ -Ecks.

Aus 220 folgt:

Hat man, von einem regelmässigen, dem Kreise einbeschriebenen  $n$ -Eck ausgehend, durch  $k$ -malige Halbierung der Centriwinkel (nach 216) ein regelmässiges  $2kn$ -Eck construirt, so sind  $2k$  Seiten des letzteren zusammen grösser als eine Seite des ersteren.

Denkt man sich die Halbierung der Centriwinkel ins Unendliche fortgesetzt, so rücken die Theilpunkte auf der Kreislinie einander immer näher, und der Umfang des Polygons nähert sich immer mehr der Kreislinie selbst. Hieraus folgt:

Man kann die Kreislinie als ein regelmässiges Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachten.

Anm. Dieselbe Betrachtungsweise lässt sich auf jede krumme Linie anwenden, wenn man von einer Reihe anstossender gleicher Sehnen ausgeht, und durch Senkrechten, die in ihrer Mitte errichtet werden, neue Theilpunkte herstellt.

Demnach folgt aus 220:

Der Umfang einer Kreislinie ist grösser als der eines einbeschriebenen regelmässigen Polygons.

Und aus 221:

Jeder Bogen einer Kreislinie ist grösser als die zugehörige Sehne.

Anm. 224 folgt auch aus 223, und umgekehrt.

**103.\*** Nach 108 ist in den rechtwinkligen Dreiecken  $\overline{A_1C_1D_1}$  und  $\overline{A_2C_2D_2}$  (Fig. 63)

Fig. 62.

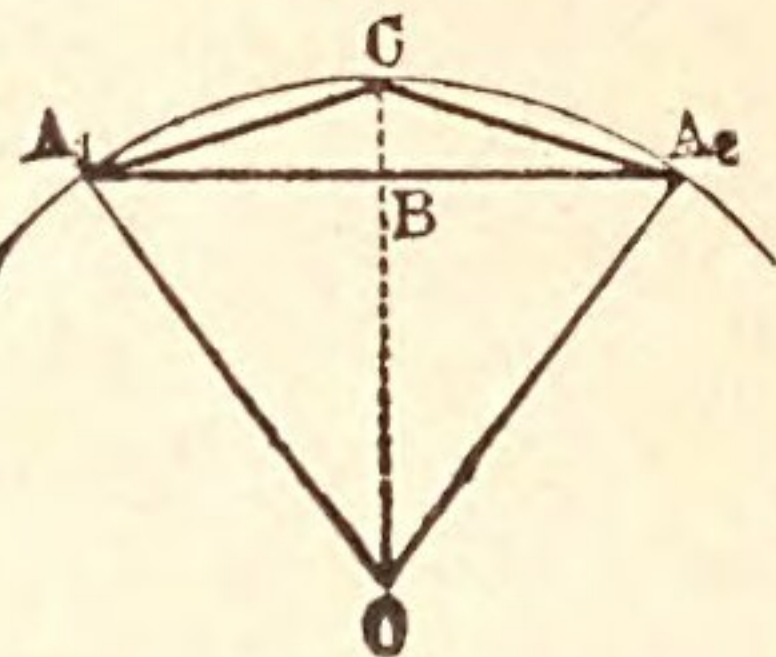
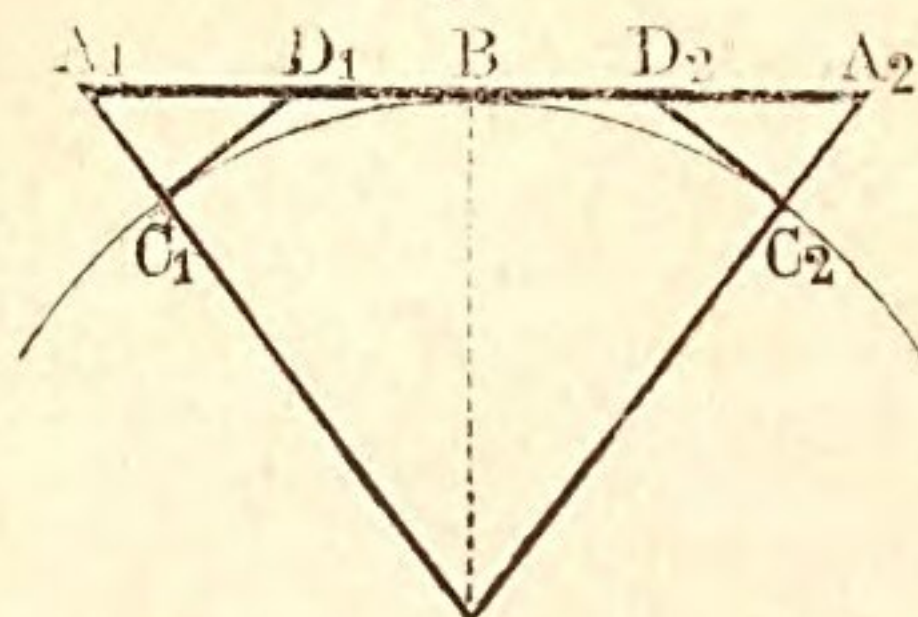




Fig. 63.



$$\begin{aligned} A_1D_1 &> C_1D_1; \\ A_2D_2 &> C_2D_2. \end{aligned}$$

Ferner  $D_1D_2 = D_1D_2.$

Folglich durch Addition:

$$A_1A_2 > C_1D_1 + D_1D_2 + D_2C_2.$$

Bezeichnet man nun Seite und Umfang des dem Kreise umbeschriebenen  $n$ -Ecks mit  $S_n$  und  $U_n$ , und ebenso Seite und Umfang des umbeschriebenen  $2n$ -Ecks mit  $S_{2n}$  und  $U_{2n}$ , so ist

$$A_1A_2 = S_n; \quad C_1D_1 = C_2D_2 = \frac{1}{2}S_{2n}; \quad D_1D_2 = S_{2n};$$

also geht die letzte Formel über in

$$S_n > 2 \cdot S_{2n},$$

oder, mit  $n$  multiplicirt:

$$n \cdot S_n > 2n \cdot S_{2n};$$

d. h.:

$$U_n \geq U_{2n};$$

225. d. h.: Der Umfang eines regelmässigen dem Kreise umbeschriebenen  $2n$ -Ecks ist kleiner als der des einbeschriebenen  $n$ -Ecks.

Aus 225 folgt:

226. Hat man, von einem regelmässigen, dem Kreise umbeschriebenen  $n$ -Eck ausgehend, durch  $k$ -maliges Tangentenziehen (nach 218) ein regelmässiges  $2kn$ -Eck construirt, so sind  $2k$  Seiten des letzteren zusammen kleiner als eine Seite des ersteren.

Denkt man sich das Ziehen der Tangenten ins Unendliche fortgesetzt, so rücken die Berührungspunkte auf der Kreislinie einander immer näher, und der Umfang des Polygons nähert sich immer mehr der Kreislinie selbst. (Vgl. Nr. 93.) Durch diese Betrachtung erhält man wieder den Satz 222.

Demnach folgt aus 225:

227. Der Umfang einer Kreislinie ist kleiner als der eines umbeschriebenen regelmässigen Polygons.

Und aus 226:

228. Jeder Bogen einer Kreislinie ist kleiner als die in seiner Mitte gezogene und durch die Verlängerungen der ihn einschliessenden Radien begrenzte Tangentenstrecke.

Anm. 228 folgt auch aus 227, und umgekehrt.

**104. Zwei Kreislinien.** — Da durch drei gegebene Punkte nur eine Kreislinie gelegt werden kann (202), so können zwei



Kreislinien nicht drei oder mehr gemeinsame Punkte haben. Da ferner nach 192 unendlich viele Kreislinien durch zwei gegebene Punkte gehen, so können zwei Kreislinien zwei gemeinsame Punkte haben. Diese können in einen einzigen zusammenfallen, oder ganz verschwinden.

Zwei gemeinsame Punkte. — Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier beliebiger Kreislinien (bezw. die durch diese Strecke bestimmte Gerade) heisst ihre Centrallinie.

Verbindet man die Schnittpunkte ( $A, B$ ) zweier Kreislinien mit ihren Mittelpunkten ( $O, O_1$ ), so folgt aus 109 und 110:

Die Centrallinie zweier sich schneidender Kreislinien ist kleiner als die Summe, und grösser als die Differenz der Radien (und umgekehrt). 229.

Zieht man durch die beiden Schnittpunkte  $A$  und  $B$  die gemeinsame Secante, so folgt aus 106:

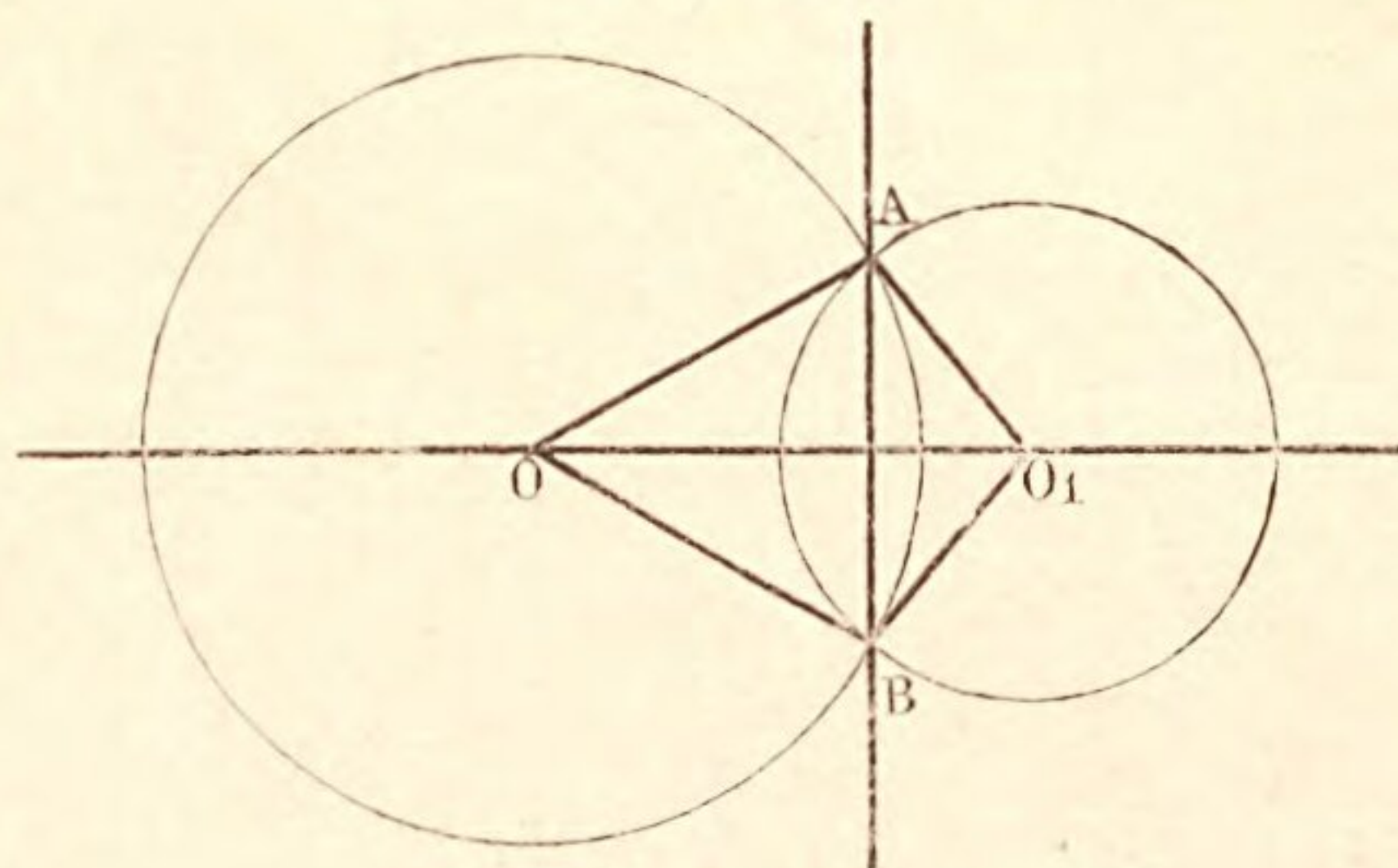
Die Centrallinie zweier sich schneidender Kreislinien steht senkrecht auf der gemeinsamen Secante und halbirt die gemeinsame Sehne. 230.

Ein gemeinsamer Punkt. — Bewegt der Kreis  $O_1$  sich so, dass sein Mittelpunkt  $O_1$  auf der Centrallinie sich von  $O$  entfernt, so werden in den Dreiecken  $OAO_1$  und  $OBO_1$  die Winkel  $OA O_1$  und  $OB O_1$  grösser (123) und nähern sich dem Werthe  $2R$ . Ist  $OA O_1 = OB O_1 = 2R$  (Fig. 65), so fällt  $A$  mit  $B$  zusammen, die gemeinsame Secante geht in eine gemeinsame Tangente über (vgl. Nr. 92), und man sagt, die Kreise berühren sich von aussen. Da nun  $OA + AO_1 = OO_1$  ist, so hat man den Satz:

Die Centrallinie zweier sich von aussen berührender Kreislinien ist gleich der Summe der Radien (und umgekehrt). 231.

Anm. Ist im umgekehrten Falle die Centrallinie ( $OO_1$ ) zweier Kreislinien gleich der Summe der beiden Radien, so steht die auf  $OO_1$  in  $A$  errichtete Senkrechte auf jedem der beiden Radien in seinem Endpunkte senkrecht, ist also gemeinsame Tangente beider Kreislinien (180) im Punkte  $A$ . Mithin berühren sich die Kreislinien in diesem Punkte.

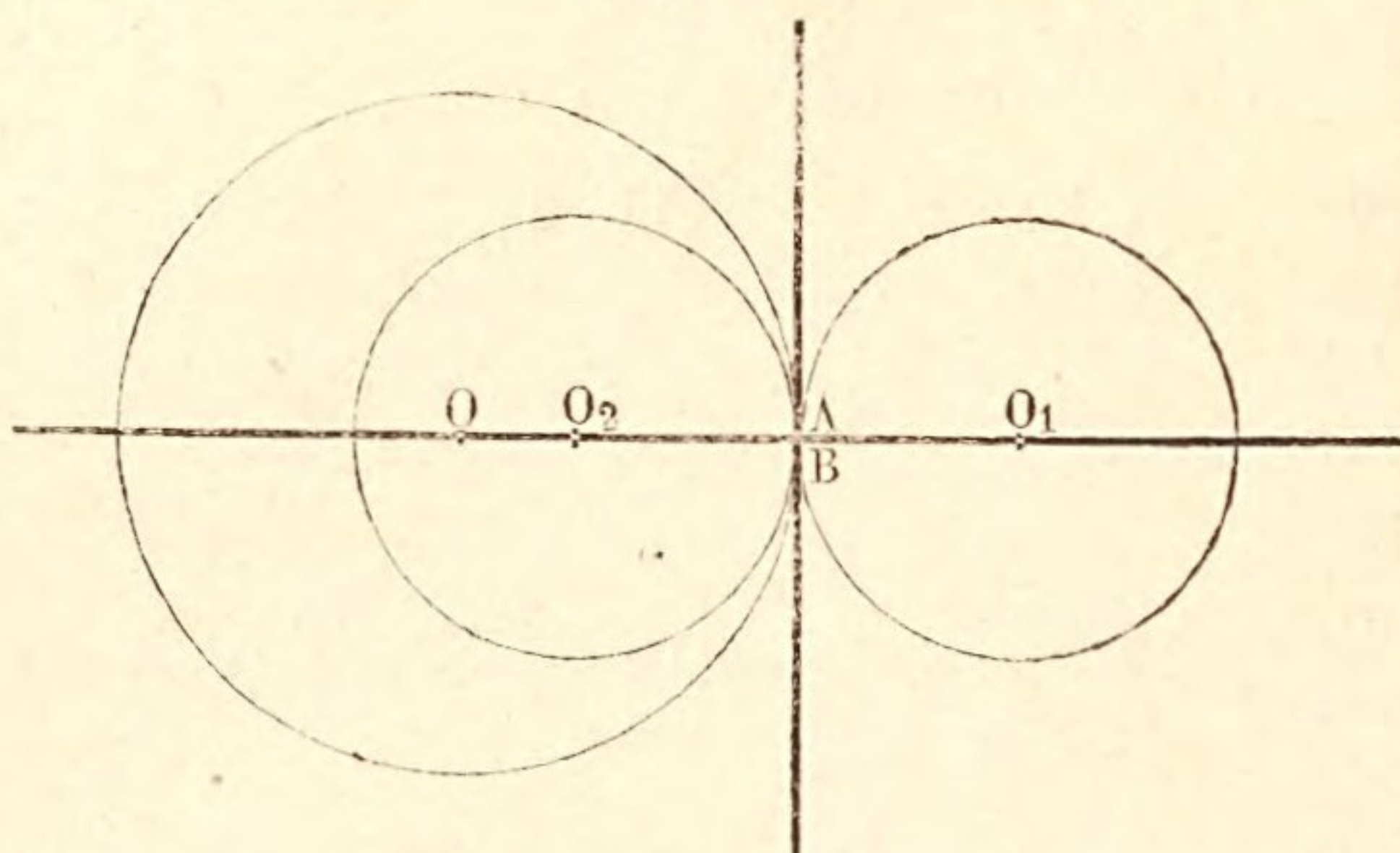
Fig. 64.





Bewegt der Kreis  $O_1$  (Fig. 64) sich so, dass sein Mittelpunkt  $O_1$  auf der Centrallinie sich  $O$  nähert, so werden in den

Fig. 65.



Dreiecken  $\overline{OAO_1}$  und  $\overline{OBO_1}$  die Winkel  $\angle OAO_1$  und  $\angle BOO_1$  kleiner (123) und nähern sich dem Werthe Null. Ist  $\angle OAO_2 = \angle BOO_2 = 0$  (Fig. 65), so fällt  $A$  mit  $B$  zusammen, die gemeinsame Secante geht in eine gemeinsame Tangente über (wie oben), und

man sagt, die Kreise berühren sich von innen. Da nun  $OA - O_2A = OO_2$  ist, so hat man den Satz:

232. Die Centrallinie zweier sich von innen berührender Kreislinien ist gleich der Differenz der Radien (und umgekehrt).

Anm. Hinsichtlich der Umkehrung dieses Satzes s. d. vorige Anm. — Zwei gleiche Kreislinien können sich nur von aussen berühren.

Aus 230 folgt:

233. Die Centrallinie zweier sich berührender Kreislinien steht senkrecht auf der gemeinsamen Tangente und geht durch den Berührungspunkt.

Kein gemeinsamer Punkt. — Bewegt der Kreis  $O_1$  (Fig. 65) sich so, dass sein Mittelpunkt  $O_1$  auf der Centrallinie sich von  $O$  entfernt, so haben die beiden Kreislinien keinen Punkt mehr gemeinsam, und jeder Kreis liegt ausserhalb des anderen. Da durch diese Bewegung die Centrallinie grösser geworden ist, als die Summe der Radien, so hat man den Satz:

234. Die Centrallinie zweier ausser einander liegender Kreislinien\*) ist grösser als die Summe der Radien (und umgekehrt).

Bewegt der Kreis  $O_2$  (Fig. 65) sich so, dass sein Mittelpunkt  $O_2$  auf der Centrallinie sich  $O$  nähert, so haben die beiden Kreislinien ebenfalls keinen Punkt mehr gemeinsam,

\*) Dieser Ausdruck ist nicht ganz genau, da die Lage in, bzw. ausser einander sich nicht auf die Kreislinien, sondern die Kreisflächen bezieht, und im ersteren Falle nur die kleinere Kreisfläche in der grösseren liegt, nicht aber umgekehrt. Der Ausdruck kann indess kein Missverständniss hervorrufen und empfiehlt sich durch seine Kürze.



und ein Kreis liegt innerhalb des anderen. Da durch diese Bewegung die Centrallinie kleiner geworden ist als die Differenz der Radien, so hat man den Satz:

Die Centrallinie zweier in einander liegender 235. Kreislinien\*) ist kleiner als die Differenz der Radien (und umgekehrt).

Ist insbesondere die Centrallinie gleich Null, so haben die beiden Kreise denselben Mittelpunkt und heissen concentrisch.

**105. Rückblick.** — Bezeichnet man die Radien der beiden Kreise durch  $r$  und  $\varrho$ , die Centrallinie (als Strecke) durch  $c$ , so sind demnach zwischen zwei Kreislinien folgende Beziehungen möglich:

- 1)  $c > r + \varrho$ . Lage ausser einander.
- 2)  $c = r + \varrho$ . Berührung von aussen.
- 3)  $c \begin{cases} < r + \varrho \\ > r - \varrho \end{cases}$ . Schnitt.
- 4)  $c = r - \varrho$ . Berührung von innen.
- 5)  $c < r - \varrho$ . Lage in einander.

Anm. Von zwei sich berührenden Kreislinien sagt man auch, dass sie zwei zusammenfallende, von zwei ausser oder in einander liegenden, dass sie zwei imaginäre Punkte gemeinsam haben (vgl. Nr. 153). — Anwendung der Beziehungen zweier Kreise auf die Theorie der Sonnenfinsterniss.

Unter den zur Construction einer Kreislinie gegebenen Bedingungen kann sich nun auch die befinden, dass die gesuchte Kreislinie eine gegebene berühren soll. Da die gegebene Kreislinie in eine Gerade oder einen Punkt ausarten kann, so ist diese Bedingung die allgemeinste, und enthält die beiden letzteren (nämlich dass die gesuchte Kreislinie eine gegebene Gerade berühren oder durch einen gegebenen Punkt gehen soll) als specielle Fälle. Jedoch führen unter den Zusammenstellungen einer Kreislinie mit einer andern Bedingung nur wenige zu solchen geometrischen Oertern, die durch Lineal und Cirkel construierbar sind. Man erhält noch folgende

**106. Sätze über den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises.** — 6) (Fortsetzung zu 197.) Gegeben  $k_1, A_1$  (eine Kreislinie und ein Punkt auf derselben). Da  $k_1$  und die gesuchte Kreislinie in  $A_1$  dieselbe Tangente haben, die durch  $k_1$  und  $A_1$  vollkommen bestimmt ist, so ist dieser Fall auf 194 zurückgeführt, und man hat den Satz:

\*) Siehe Fussnote vor. Seite.



236. Soll eine Kreislinie *eine gegebene Kreislinie in einem gegebenen Punkte berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die durch den Punkt und den Mittelpunkt gehende Gerade.

Anm. Man untersuche die verschiedenen Fälle der Lage des gegebenen Punktes zur Kreislinie.

7) Gegeben  $k_1, r$ . Ist  $r_1$  der Radius und  $O_1$  der Mittelpunkt des gegebenen Kreises  $k_1$ , so kennt man die Centrallinie ( $r_1 \pm r$ ) der beiden Kreise. Jeder Punkt, dessen Abstand von  $O_1$  gleich  $r_1 \pm r$  ist, kann Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein. Demnach:

237. Soll eine Kreislinie *mit gegebenem Radius eine gegebene Kreislinie berühren*, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die mit der Summe oder Differenz der beiden Radien aus dem gegebenen Mittelpunkte beschriebene Kreislinie.

Anm. Soll eine Kreislinie zwei gegebene Kreislinien berühren, so ist in zwei Fällen der geometrische Ort ihres Mittelpunktes leicht zu construiren. 1) Sind die beiden Kreislinien concentrisch,  $O$  ihr Mittelpunkt,

$r$  und  $\varrho$  ihre Radien, so ist der geometrische Ort die mit  $\frac{r \pm \varrho}{2}$  aus  $O$  beschriebene Kreislinie, und der Radius des gesuchten Kreises  $\frac{r \mp \varrho}{2}$ .

2) Sind die beiden Kreislinien einander gleich, so ist der geometrische Ort die auf der Centrallinie in ihrer Mitte errichtete Senkrechte. Ein specieller Fall hiervon ist 192.

## Zweite Abtheilung.

### Geometrie der ruhenden Gebilde.

107.\* *Vorbemerkung.* — Die bisherigen Betrachtungen beruhten auf der Eigenschaft der Ebene, dass ein in ihr befindliches Gebilde sich frei in ihr bewegen kann, so dass es sich selbst congruent bleibt, d. h. Gestalt und Grösse unverändert beibehält. Das Gebilde am Ende der Bewegung ist also dem Gebilde am Anfang der Bewegung congruent. — Wir haben ferner gesehen (189), dass es für zwei congruente Gebilde stets einen Punkt giebt, um welchen gedreht das eine Gebilde in das andere übergeht, und dass, wenn dieser Punkt in unendliche Ferne rückt, die Drehung sich in eine Verschiebung ver-



wandelt. In diesem Falle aber beschreiben alle Punkte des bewegten Gebildes parallele Geraden (Anm. zu 138). Man kann hiernach zwei congruente Gebilde stets in solche Lage zu einander bringen, dass die Verbindungslinien je zweier homologer Punkte parallel sind (vgl. Fig. 46, S. 70). Man sagt in diesem Falle, dass die beiden Gebilde sich in perspectivischer Lage befinden. — Wir haben endlich gesehen (S 10), dass man, statt ein Gebilde durch Bewegung an einen anderen Ort zu versetzen, auch annehmen kann, es sei an diesem Orte ein mit dem ersten an Gestalt und Grösse vollständig übereinstimmendes (congruentes) Gebilde construirt. Wenn dann beide Gebilde sich in perspectivischer Lage befinden, so werden 1) alle Verbindungslinien je zweier homologer Punkte durch einen unendlich fernen Punkt gehen, 2) alle Schnittpunkte je zweier homologer Geraden auf einer unendlich fernen Geraden liegen (d. h. unendlich ferne Punkte sein). Vgl. Fig. 46.

Diese letztere Betrachtung lässt sich nun verallgemeinern. Man kann nämlich entweder den unendlich fernen Punkt in 1) oder die unendlich ferne Gerade in 2), oder beides in endliche Entfernung rücken, und erhält dadurch statt eines congruenten Gebildes ein Gebilde entweder mit gleicher Gestalt und verschiedener Grösse, oder mit verschiedener Gestalt und gleicher Grösse, oder mit verschiedener Gestalt und verschiedener Grösse.

Dieselbe Verallgemeinerung erleidet auch der Begriff der perspectivischen Lage. Man sagt also allgemein: Zwei Gebilde liegen perspectivisch, wenn alle Verbindungslinien je zweier homologer Punkte durch denselben Punkt gehen. Zwei Gebilde, welche so beschaffen sind, dass sie in perspectivische Lage gebracht werden können, heissen projectivisch, und die zwischen ihnen bestehende Beziehung heisst Projectivität.

Indem man nun annimmt, dass die Verbindungslinien homologer Punkte a) durch einen unendlich fernen, b) durch einen endlich fernen Punkt gehen; ferner, dass die Schnittpunkte homologer Geraden 1) auf einer unendlich fernen, 2) auf einer endlich fernen Geraden liegen, erhält man durch Zusammenstellung von 1) und 2) mit a) und b) folgende Hauptarten projectivischer Beziehung.

1a) Congruenz. ( $\cong$ )

2a) Affinität. ( $\sim$ )

1b) Aehnlichkeit. ( $\sim$ )

2b) Collineation. ( $\wedge$ )

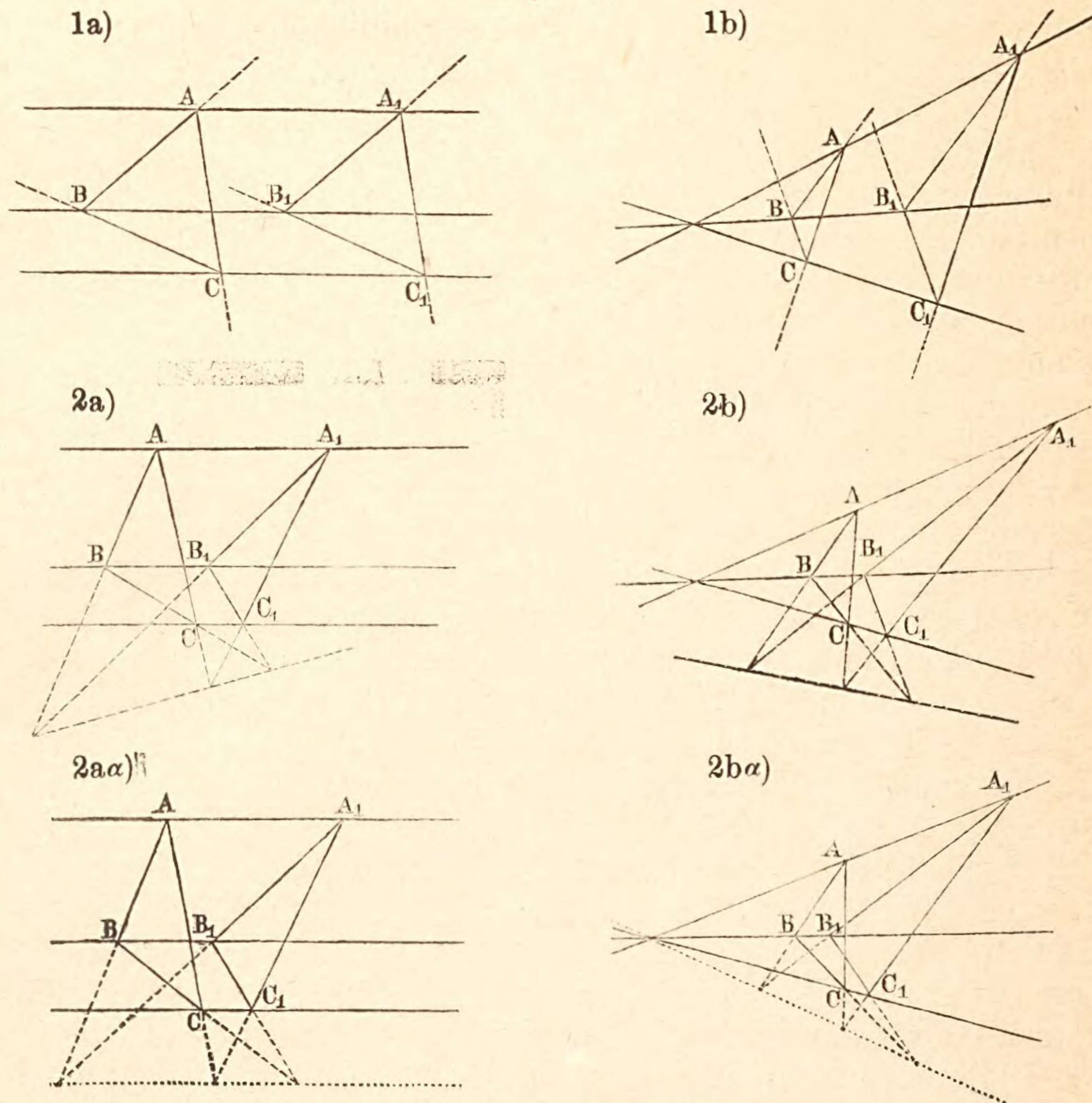
Geht im Falle 2) die endlich ferne Gerade durch den



Schnittpunkt der Verbindungslinien homologer Punkte, so entstehen aus Affinität und Collineation die speciellen Fälle:

2a $\alpha$ ) Centrale Affinität. (=2=) | 2b $\alpha$ ) Centrale Collineation.  
(Affingleichheit.)

Fig. 66.



Anm. Da in allen diesen Fällen (ausgenommen 1a) das neue Gebilde aus dem alten sich nicht durch Bewegung ableiten lässt, so wird man die gegenseitigen Beziehungen beider Gebilde am besten erkennen, wenn sie perspectivisch liegen. Es wird aber auch festzustellen sein, welche Beziehungen den Gebilden erhalten bleiben, wenn man sie durch Bewegung aus dieser Lage herausbringt.

Da der Punkt weder Grösse noch Gestalt hat, und die Gerade erst durch Bewegung in der Ebene aus sich heraus tritt, so finden die eben erwähnten Verallgemeinerungen auf die Geometrie der Geraden keine Anwendung. Die Lagenbeziehungen fester Punkte auf einer Geraden müssen im Zusammenhange mit den durch diese Punkte gehenden Geraden unter-



sucht werden, da das Mittel, diese Beziehungen selbständig zu entwickeln (die geometrischen Operationen mit Punkten\*), noch nicht in den Kreis der Elemente eingeführt ist.

## I. Die Aehnlichkeit.

### 1) Dreiecke.

#### a. Aehnlichkeit bei perspectivischer Lage.

**108. Definition ähnlicher Dreiecke.** — Verbindet man die Endpunkte zweier paralleler Strecken  $AB$  und  $A_1B_1$  durch gerade Linien, welche sich in  $S$  schneiden (Fig. 67), so entstehen zwei Dreiecke,  $SAB$  und  $SA_1B_1$ , in denen 1) je zwei „homologe“ Seiten parallel sind ( $SA \parallel SA_1$ ,  $SB \parallel SB_1$ ,  $AB \parallel A_1B_1$ ), und 2) die Verbindungslinien je zweier „homologer“ Ecken ( $AA_1$ ,  $BB_1$ ) durch denselben Punkt ( $S$ ) gehen. Vermöge der letzteren Eigenschaft sagt man, dass die Dreiecke (wie auch die Strecken  $AB$  und  $A_1B_1$ ) sich in perspectivischer Lage befinden, vermöge beider Eigenschaften, dass sie einander ähnlich seien. Der Punkt  $S$  heisst der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke, und zwar äusserer, wenn, wie in Fig. 67, die aus ihm nach zwei homologen Ecken gehenden Strecken gleiche Richtung haben, innerer, wenn, wie in Fig. 68, diese Strecken entgegengesetzte Richtung haben. Aus Betrachtung von Fig. 67 und 68 folgt:

Fig. 67.

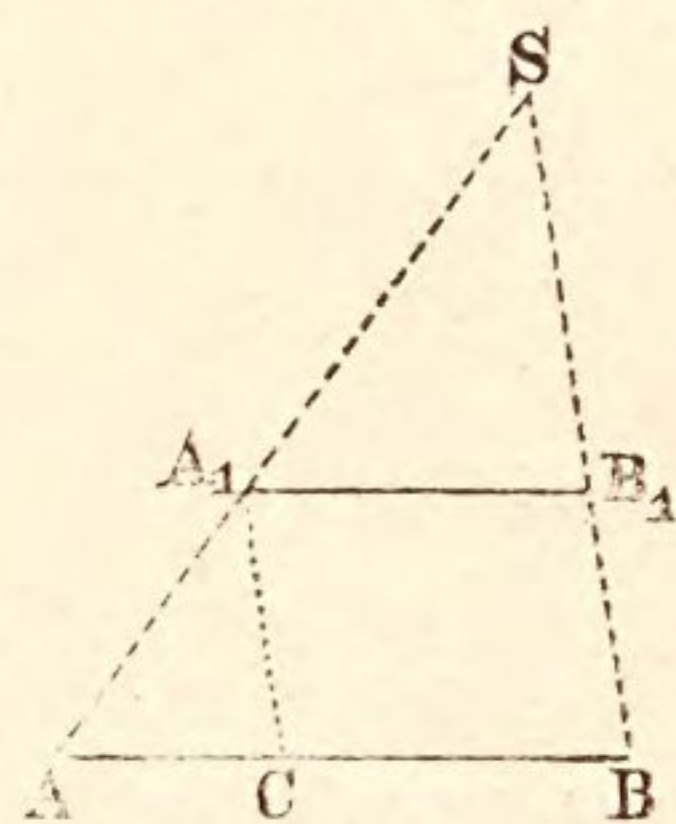
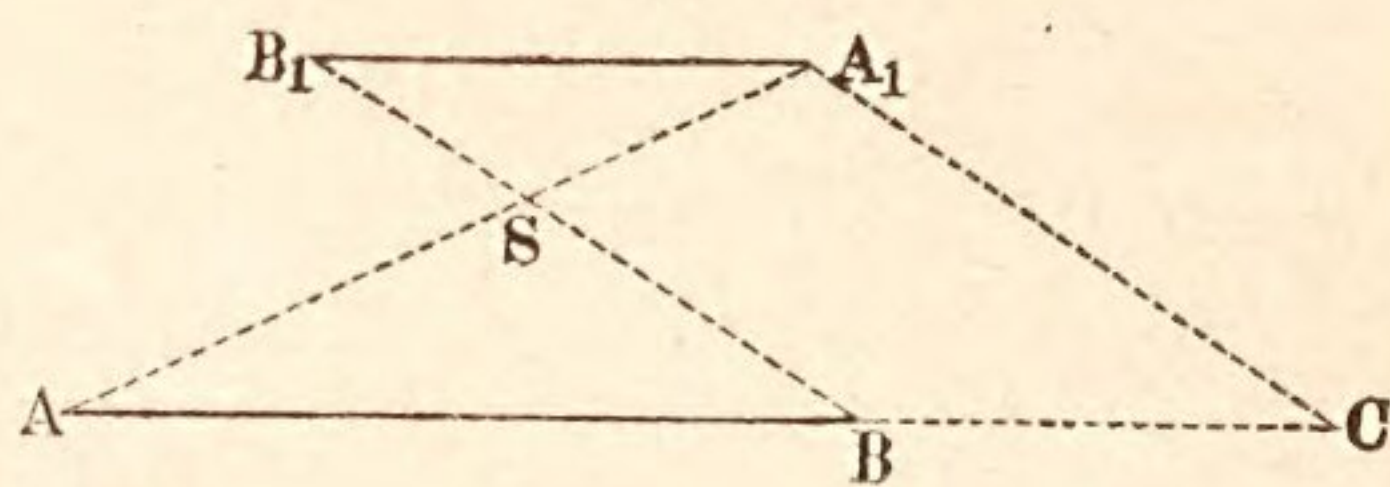


Fig. 68.



Je zwei homologe Seiten in zwei ähnlichen, perspectivisch liegenden Dreiecken haben gleiche Richtung, wenn der Aehnlichkeitspunkt ein äusserer, entgegengesetzte, wenn er ein innerer ist.

Zieht man zu einer Seite eines Dreiecks eine Parallele (welche die beiden anderen Seiten, oder deren Verlängerungen schneidet), so ist das abgeschnittene Dreieck dem gegebenen ähnlich.

Anm. Construction eines mit einem gegebenen Dreieck ähnlichen Dreiecks.

\*) System der Raumlehre I. Nr. 26 ff.; Nr. 110 ff.



**109. Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.** — 1) Aus 65 folgt für Fig. 67, und aus 66 und 61 für Fig. 68 der Satz:

240. In zwei ähnlichen Dreiecken sind je zwei homologe Winkel\*) einander gleich.

2) Denkt man sich in Fig. 67 und 68 durch  $S$  die Parallele zu  $AB$  gezogen, so folgt aus 32:

$$(1) \frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1},$$

oder (nach Theil I, 103):

$$(2) \frac{SA}{SB} = \frac{SA_1}{SB_1},$$

oder (nach Theil I, 104) aus (1):  $\frac{SA \mp SA_1}{SA} = \frac{SB \mp SB_1}{SB};$

d. h.: 
$$(3) \frac{A_1A}{SA} = \frac{B_1B}{SB}.$$

Die Formeln (1), (2), (3) enthalten den Satz (für Fig. 67 ausgesprochen):

241. Zieht man in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so ist 1) das Verhältniss des oberen oder unteren Abschnittes zur ganzen Seite auf den beiden andern Seiten gleich, 2) die beiden anderen Seiten verhalten sich wie ihre oberen oder unteren Abschnitte.

Zieht man  $A_1C \parallel SB$  bis zum Durchschnitt mit  $AB$ , so ist  $A$  der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke  $ASB$  und  $AA_1C$ , und aus Formel (3) folgt:

$$\frac{A_1S}{AS} = \frac{CB}{AB},$$

oder, da  $CB = A_1B_1$  ist (126):

$$(4) \frac{A_1S}{AS} = \frac{A_1B_1}{AB};$$

242. d. h.: Zieht man in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so verhält sich diese Seite zur Parallele, wie eine der anderen Seiten zu ihrem oberen Abschnitt.

Aus (4) folgt endlich

$$(5) \frac{A_1S}{A_1B_1} = \frac{AS}{AB}.$$

Die Formeln (2) und (5) aber geben zusammen den Satz:

---

\*) D. h. Winkel, deren Schenkel homologe Seiten sind.



In zwei ähnlichen Dreiecken sind je zwei homologe 243. Seitenverhältnisse einander gleich.

**110. Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks durch Winkel und Seitenverhältnisse.** — Von ähnlichen Gebilden sagt man, dass sie gleiche Gestalt haben. Die Gestalt eines Dreiecks ist also bestimmt durch diejenigen Stücke, in welchen ähnliche Dreiecke übereinstimmen, nämlich durch Winkel (240) und Seitenverhältnisse (243). Da durch zwei Winkel eines Dreiecks der dritte bestimmt ist (77) und durch zwei Seitenverhältnisse das dritte  $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\right)$ , so kommen für die Bestimmung der Gestalt des Dreiecks nur 2 Winkel und 2 Seitenverhältnisse in Betracht. Nun sind zur Construction der ähnlichen Dreiecke  $\overline{SAB}$  und  $\overline{SA_1B_1}$  (Fig. 69) ausreichend:

1) Zwei Winkel  $\gamma, \alpha$ . (Eine Seite,  $b$  oder  $b_1$ , wird beliebig angenommen, und dann das Dreieck aus  $b, \alpha, \gamma$  construirt.)

2) Ein Winkel  $\gamma$  und das Verhältniss der ihn einschliessenden Seiten. (Das Dreieck wird aus zwei in dem gegebenen Verhältniss stehenden Strecken  $a$  und  $b$ , oder  $a_1$  und  $b_1$ , und aus dem Winkel  $\gamma$  construirt.)

3) Ein Winkel  $\gamma$  und das Verhältniss einer anliegenden zur gegenüberliegenden Seite. (Das Dreieck wird aus zwei in dem gegebenen Verhältniss stehenden Strecken  $b$  und  $c$ , oder  $b_1$  und  $c_1$  und aus dem Winkel  $\gamma$  construirt.)\*

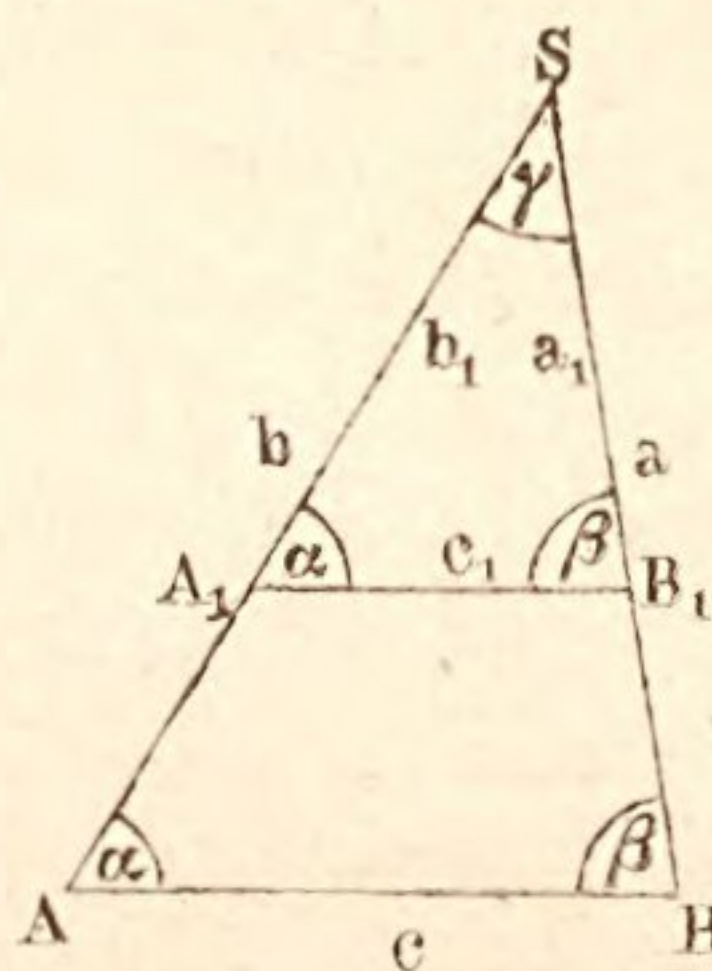
4) Zwei Seitenverhältnisse. (Das Dreieck wird aus drei in den gegebenen Verhältnissen stehenden Strecken  $a, b, c$ , oder  $a_1, b_1, c_1$  construirt.)

Man hat also den Satz:

Zur Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks durch 244. Winkel und Seitenverhältnisse sind zwei dieser Stücke nothwendig und hinreichend.

Ist nun zu einem von zwei ähnlichen, perspectivisch liegenden Dreiecken  $(\overline{abc} \sim \overline{a_1b_1c_1})$  irgendwo in der Ebene ein congruentes  $(\overline{a_2b_2c_2} \cong \overline{a_1b_1c_1})$  construirt, so ist auch  $\overline{abc} \sim \overline{a_2b_2c_2}$ . Man kann daher aus 2 Seitenverhältnissen oder Winkeln ähn-

Fig. 69.



\*) Damit nur eine Lösung möglich sei, muss  $c > b$  sein. Vgl. 92.



liche Dreiecke nicht nur in perspectivischer, sondern in beliebiger Lage construiren, und aus den 4 oben aufgestellten Fällen der Bestimmung der Gestalt eines Dreiecks gehen hervor

Die Aehnlichkeitssätze:

245. 1) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
246. 2) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältniss der ihn einschliessenden Seiten übereinstimmen.
247. 3) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältniss einer anliegenden zur (grösseren) gegenüberliegenden Seite übereinstimmen.
248. 4) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Anm. Anderer Beweis der Aehnlichkeitssätze. Sind  $\overline{abc}$  und  $\overline{a_2b_2c_2}$  die gegebenen Dreiecke, so trage man (Fig. 69)  $b_2$  von  $S$  aus auf  $b$  ab bis  $A_1$ , und ziehe  $A_1B_1 \parallel AB$ , wodurch das Dreieck  $SA_1B_1$  ( $a_1b_1c_1$ ) entsteht. Dann ist  $\overline{a_1b_1c_1} \sim \overline{abc}$  (239), und  $\overline{a_1b_1c_1} \cong \overline{a_2b_2c_2}$  (für 245 nach 90, für 246 nach 91, für 247 nach 92, für 248 nach 93); folglich  $\overline{abc} \sim \overline{a_2b_2c_2}$ .

Aus der Gleichheit zweier Winkel oder Seitenverhältnisse in zwei Dreiecken folgt hiernach die Gleichheit aller übrigen.

Anm. Jedes Dreieck zerfällt durch eine zu einer Seite gezogene Parallele in ein ähnliches Dreieck und ein Trapez. Ist das gegebene Dreieck gleichschenkelig, so sind auch die nicht parallelen Seiten des Trapezes einander gleich, und das Trapez heisst gleichschenkelig. Die Verbindungsstrecke der Mitten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes heisst seine Mittellinie. Ist die kleinere der parallelen Seiten gleich Null, so geht das Trapez in ein Dreieck über.

III. Vierte Proportionale. — Wenn zwischen vier Strecken  $a, b, a_1, b_1$  die Proportion besteht:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},$$

so heisst jede der vier Strecken die vierte Proportionale der drei übrigen. Aus Fig. 67 ergibt sich nun die Lösung der

Aufgabe 10. — Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu construiren.

Man zeichne einen beliebigen Winkel\*) und trage (wenn  $a$  die gesuchte Strecke ist) vom Scheitel aus auf dem einen Schenkel  $b_1$  und dann  $a_1$  (hinter oder auf einander) ab, auf dem andern  $b$ . Dann verbinde man die Endpunkte von  $b$  und  $b_1$

\*) Am besten mit der Oeffnung nach oben, wenn die gesuchte Strecke im Zähler, mit der Oeffnung nach unten, wenn sie im Nenner steht.



und ziehe zu dieser Verbindungsstrecke durch den Endpunkt von  $a_1$  die Parallele. Diese schneidet auf dem andern Schenkel die Strecke  $a$  ab.

Da in Fig. 67  $\frac{A_1S}{A_1A} = \frac{B_1S}{B_1B}$  ist, so erhält man ferner die Lösung der

Aufgabe 11. — Eine gegebene Strecke  $AS$  nach einem gegebenen Verhältniss in zwei oder mehrere Theile zu theilen (d. h. so, dass die Theile sich wie gegebene Strecken oder Zahlen zu einander verhalten).

Man ziehe durch den einen Endpunkt der zu theilenden Strecke eine beliebige Gerade, trage auf derselben nach einander die gegebenen Strecken ab (oder solche, die sich wie die gegebenen Zahlen verhalten), verbinde den Endpunkt der letzten mit dem andern Endpunkt der zu theilenden Strecke und ziehe zu dieser Verbindungsstrecke durch die übrigen Endpunkte die Parallelen. Diese theilen die gegebene Strecke in dem geforderten Verhältniss.

Anm. Der specielle Fall dieser Aufgabe: Eine Strecke in  $n$  gleiche Theile zu theilen, wurde in entsprechender Weise bereits auf S. 21 gelöst.

**112. Harmonische Punktepaare.** — Die Aufgabe 11 kann auch in folgender, verallgemeinerter Fassung ausgesprochen werden:

Aufgabe 12. — Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten der Geraden ein gegebenes Verhältniss haben.

Diese Aufgabe kann ausser durch Fig. 67 auch durch Fig. 68 gelöst werden. Denn sind dort  $A$  und  $S$  die gegebenen Punkte, so kann der

gesuchte Punkt  $A_1$  nicht nur auf der Strecke  $AS$  (Fig. 67), sondern auch ausserhalb derselben (Fig. 68) liegen.

Sind  $A$  und  $B$  die gegebenen Punkte (Fig. 70), so kann man die zweite Verhältnissstrecke entweder an die erste ( $AC$ ) antragen ( $CB_1$ ), oder auf ihr abtragen ( $CB_2$ ). Die durch  $C$  zu  $B_1B$  oder  $B_2B$  gezogenen Parallelen geben dann als gesuchten Punkt  $_1$  oder  $C_2C$ , und es ist

$$\frac{AC}{B_1C} = \frac{AC_1}{BC_1}; \quad \frac{AC}{B_2C} = \frac{AC_2}{BC_2}.$$

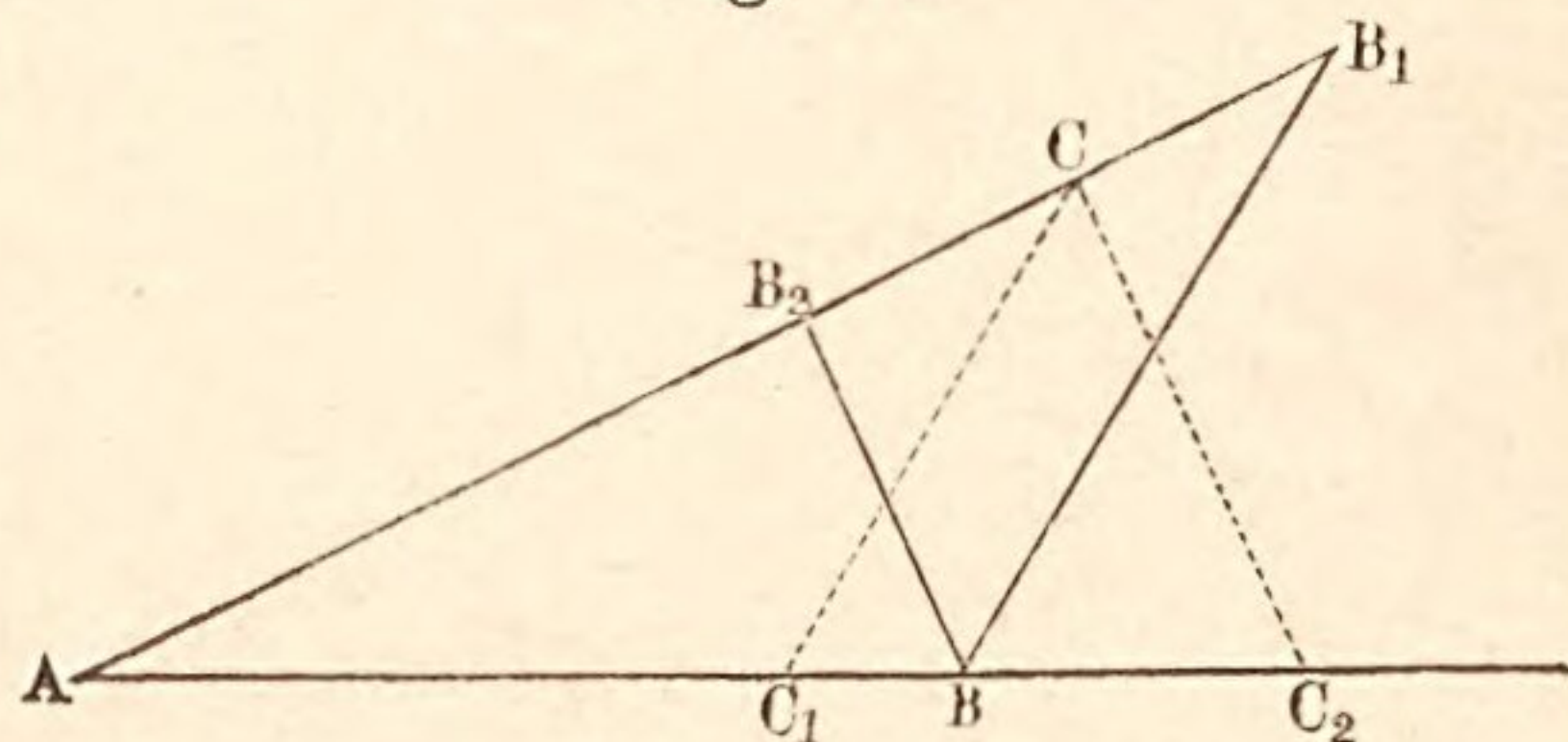


Fig. 70.



Es giebt also auf einer Geraden zwei Punkte ( $C_1$  und  $C_2$ ), deren Abstände von zwei gegebenen Punkten ( $A$  und  $B$ ) ein gegebenes Verhältniss haben. Das Punktepaar  $C_1, C_2$  heisst harmonisch zu  $A, B$ , und es besteht zwischen den vier Abständen des einen Paares vom andern die aus den letzten Formeln folgende Beziehung:

$$(1) \quad \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}.$$

Hiernach sagt man, eine Strecke ( $AC_2$ ) sei harmonisch getheilt, wenn der erste Theil ( $AC_1$ ) sich zum zweiten ( $BC_1$ ) verhält, wie die ganze Strecke ( $AC_2$ ) zum dritten ( $BC_2$ ).

Aus (1) folgt:

$$(2) \quad \frac{AC_1}{AC_2} = \frac{BC_1}{BC_2}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von (1) nur dadurch, dass das Paar ( $A, B$ ) mit dem Paare ( $C_1 C_2$ ) vertauscht ist. Man hat also den Satz:

249. Ist von zwei Punktepaaren das zweite harmonisch zum ersten, so ist auch das erste harmonisch zum zweiten.

Die Punkte eines solchen Paares heissen einander zugeordnet (conjugirt).

Ist auf einer Geraden ein Punktepaar  $A, B$  gegeben, so giebt es zu jedem zwischen  $A$  und  $B$  liegenden Punkte  $C_1$  einen vierten harmonischen Punkt  $C_2$ . Also:

250. Zu einem Punktepaare giebt es beliebig viele harmonische.

Aus (1) folgt:

$$\frac{AC_1}{AB - AC_1} = \frac{AC_2}{AC_2 - AB},$$

oder (nach Theil I, 101):

$$\frac{AB}{AC_1} - 1 = 1 - \frac{AB}{AC_2}; \quad \frac{AB}{AC_1} + \frac{AB}{AC_2} = 2,$$

oder: 
$$(3) \quad \frac{1}{AC_1} + \frac{1}{AC_2} = \frac{2}{AB},$$

(worin man die Zähler mit einer beliebigen Strecke multiplicirt denken kann). In Folge dieses Zusammenhanges sagt man, dass die drei von  $A$  ausgehenden Strecken  $AC_1, AC_2, AB$  eine harmonische Proportion bilden, und nennt  $AB$  das har-



monische Mittel\*) zwischen  $AC_1$  und  $AC_2$ . Rückt der Punkt  $C_1$  (Fig. 70) näher an  $B$  heran, so wird  $AC_1$  grösser. Da nun  $AB$  unverändert bleibt, so folgt aus Formel (3), dass  $AB_2$  kleiner wird; d. h.: auch  $C_2$  rückt näher an  $B$ . — Fällt  $C_1$  mit  $B$  zusammen, d. h. ist  $AC_1 = AB$ , so folgt aus Formel (3), dass auch  $AC_2 = AB$  ist; d. h.: auch  $C_2$  fällt mit  $B$  zusammen. Also:

Fällt ein Punkt eines Paares mit einem Punkte 251. eines zu ihm harmonischen Paares zusammen, so fällt auch der andere mit ihm zusammen.

Ist  $AB = 2AC_1$ , so folgt aus (3), dass  $\frac{1}{AC_2} = 0$ , d. h. dass die Strecke  $AC_2$  unendlich gross ist (vgl. Theil I, 149); d. h.:

Rückt ein Punkt in die Mitte eines Punktepaares, 252. so rückt der ihm zugeordnete harmonische Punkt nach entgegengesetzter Richtung in unendliche Entfernung (und umgekehrt).

Anm.: Ueberschreitet der erste Punkt die Mitte, so kommt der zugeordnete Punkt (aus  $+\infty$  nach  $-\infty$  springend) von der entgegengesetzten Richtung her aus unendlicher Entfernung ihm wieder entgegen. (Vgl. Nr. 58.)

**113. Spezieller Fall.** — Ist in Fig. 70 der Winkel  $B_2BB_1$  ein Rechter (Fig. 71), so ist  $B_2B_1$  Durchmesser, und  $C$  Mittelpunkt des um das Dreieck  $BB_1B_2$  beschriebenen Kreises (165, vgl. Anm. z. 202), also

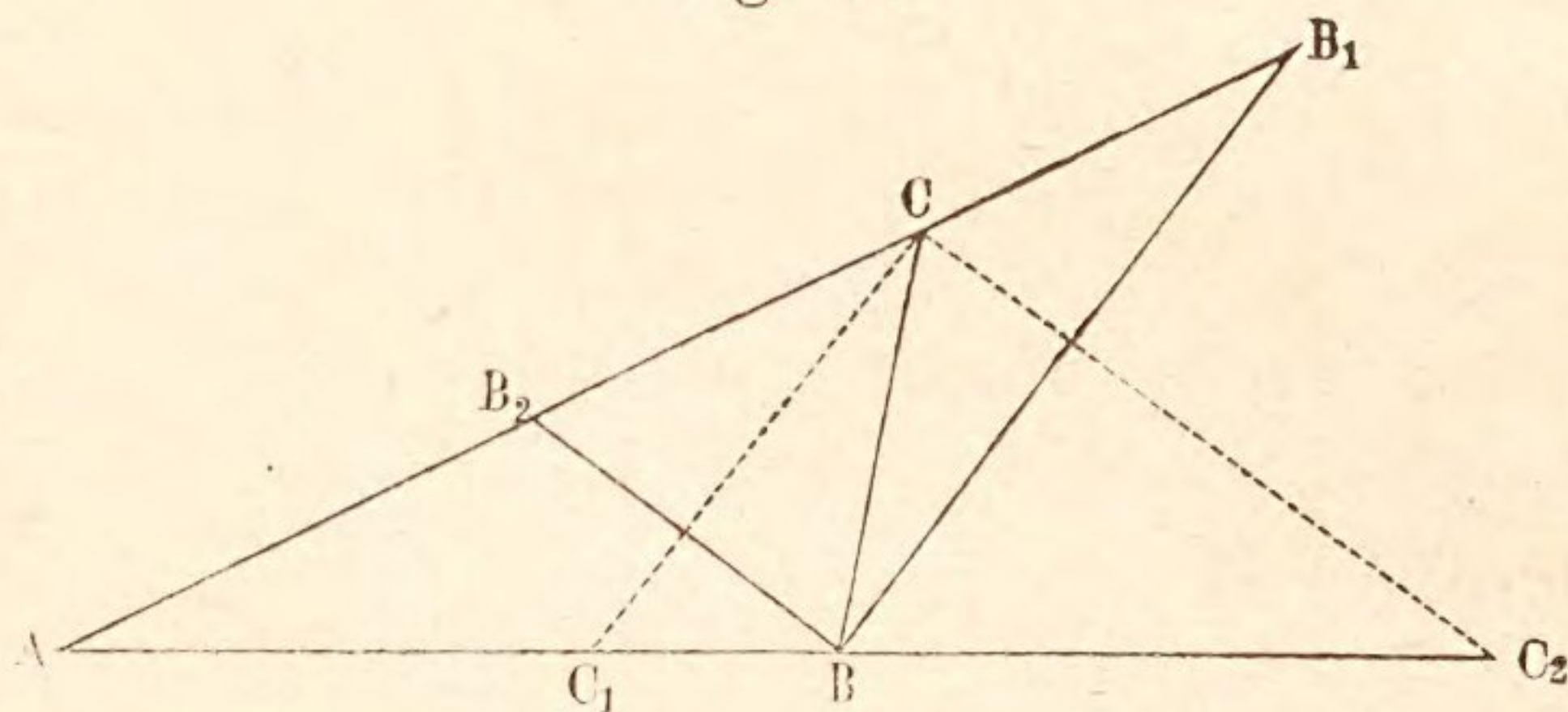
$$CB_2 = CB = CB_1.$$

Demnach sind die Dreiecke  $B_2BC$  und  $B_1BC$  gleichschenkelig, und da  $CC_1 \parallel B_1B$  und  $CC_2 \parallel B_2B$ , so ist  $CC_1$  senkrecht zu  $BB_2$ , und  $CC_2$  senkrecht zu  $BB_1$  (72). Folglich sind (Umk. z. 99)  $CC_1$  und  $CC_2$  die Geraden, welche den Winkel  $ACB$  und seinen Nebenwinkel halbiren, und da die Proportionen

$$\frac{AC}{B_1C} = \frac{AC_1}{BC_1}, \quad \frac{AC}{B_2C} = \frac{AC_2}{BC_2},$$

\*) Macht man  $AC_1 = 3$ ,  $C_1B = 1$ ,  $BC_2 = 2$ , so sind die Strecken  $AC_1 = 3$ ,  $AB = 4$ ,  $AC_2 = 6$ . Ihre Verhältnisse  $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$  sind dann die den musikalischen Intervallen Quint, Quart, Octave entsprechenden Zahlen, woraus sich der Ausdruck „harmonisch“ erklärt.

Fig. 71.





(wenn man darin  $B_1C$  und  $B_2C$  durch  $BC$  ersetzt) übergehen in

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2},$$

so hat man die Sätze:

253. Die Halbirungslinie eines Winkels im Dreieck theilt die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der anliegenden Seiten.

254. Die Halbirungslinie eines Aussenwinkels im Dreieck schneidet die gegenüberliegende Seite in einem Punkte, dessen Abstände von ihren Endpunkten sich verhalten wie die anliegenden Seiten.

Anm. Ein specieller Fall von 253 ist 99. Wie lautet der entsprechende, aus 254 folgende Satz?

Aus 253 folgt, dass alle Punkte  $C$ , deren Entfernungen von  $A$  und  $B$  sich wie die Strecken  $AC_1$  und  $BC_1$  verhalten, Spitzen von Dreiecken sind, in welchen die Halbirungslinien der Winkel  $C$  durch den Punkt  $C_1$  gehen, und die Halbirungslinien der Aussenwinkel durch den Punkt  $C_2$ . Da nun  $BB_1 \perp BB_2$ ,  $CC_1 \parallel B_1B$ ,  $CC_2 \parallel B_2B$ , so ist auch  $CC_1 \perp CC_2$ , d. h. das Dreieck  $C_1CC_2$  ist stets rechtwinklig. Der geometrische Ort von  $C$  ist also (170) die über  $C_1C_2$  als Durchmesser beschriebene Kreislinie, und man hat den Satz:

255. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen Punkten  $A$ ,  $B$  ein gegebenes Verhältniss haben, ist die Kreislinie, welche über derjenigen Strecke als Durchmesser beschrieben ist, deren Endpunkte die Strecke  $AB$  in dem gegebenen Verhältniss theilen.

Anm. Sind die beiden Abstände einander gleich, so rückt  $C_1$  in die Mitte von  $AB$ , dagegen  $C_2$  und der Mittelpunkt der Kreislinie in unendliche Entfernung, die Kreislinie verwandelt sich demnach in die Gerade, welche in  $C_1$  auf  $AB$  senkrecht steht, und der Satz 255 geht über in 120. — Wie lässt sich Aufgabe 12 mittelst der Sätze 253 und 254 lösen?

#### b. Aehnlichkeit bei verkehrt-perspectivischer Lage.

114. Statt durch eine zu einer Dreiecksseite gezogene Parallele kann man zu einem gegebenen Dreieck  $CAB$  auch dadurch ein ähnliches construiren, dass man den Winkel  $A$  in einem Punkte  $A_1$  der gegenüberliegenden Seite oder ihrer Verlängerung anträgt (Fig. 72 und 73), so dass  $CA_1B_1 = CAB$  ist. Es ist alsdann  $CAB \sim CA_1B_1$  (245). Da aber die Stücke des



einen Dreiecks in entgegengesetzter Reihe auf einander folgen wie die homologen Stücke des anderen, so müsste man, um beide in perspectivische Lage zu bringen, das eine ( $\overline{CB_1A_1}$ ) auf die entgegengesetzte Seite der Ebene bringen. Man kann daher die durch obige Construction entstandene Lage der beiden Dreiecke eine verkehrt-perspectivische nennen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt:

$$1) \quad \frac{CA}{CA_1} = \frac{CB}{CB_1} \cdot *)$$

Nimmt man nun an, dass alle vier von  $C$  ausgehende Strecken durch dasselbe Mass gemessen seien, und versteht man nach dieser Voraussetzung unter dem Producte zweier Strecken das Product ihrer Masszahlen, so kann die letzte Formel (nach Th. I, 99) geschrieben werden:

$$2) \quad CA \cdot CB_1 = CB \cdot CA_1.$$

Anm. Durch Anwendung dieser Form der Proportion erreicht man den Vortheil, dass die auf derselben Geraden liegenden Strecken auch wieder, wie früher, auf derselben Seite der Formel beisammen stehen.

In Fig. 72 ist  $CA_1B_1 + BA_1B_1 = 2R$ , oder, da  $CA_1B_1 = B_1AB$  ist:

$$B_1AB + BA_1B_1 = 2R;$$

d. h.: die Punkte  $A, B, A_1, B_1$  liegen auf derselben Kreislinie (Umk. z. 206). Formel 2) giebt hiernach den Satz:

Schneiden sich zwei Secanten eines Kreises, so 256.  
ist das Product der vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitte auf der einen so gross wie auf der andern.

In Fig. 73 ist

$$BAB_1 = BA_1B_1;$$

demnach stimmen die Dreiecke  $\overline{BAB_1}$  und  $\overline{BA_1B_1}$  in einer

Fig. 72.

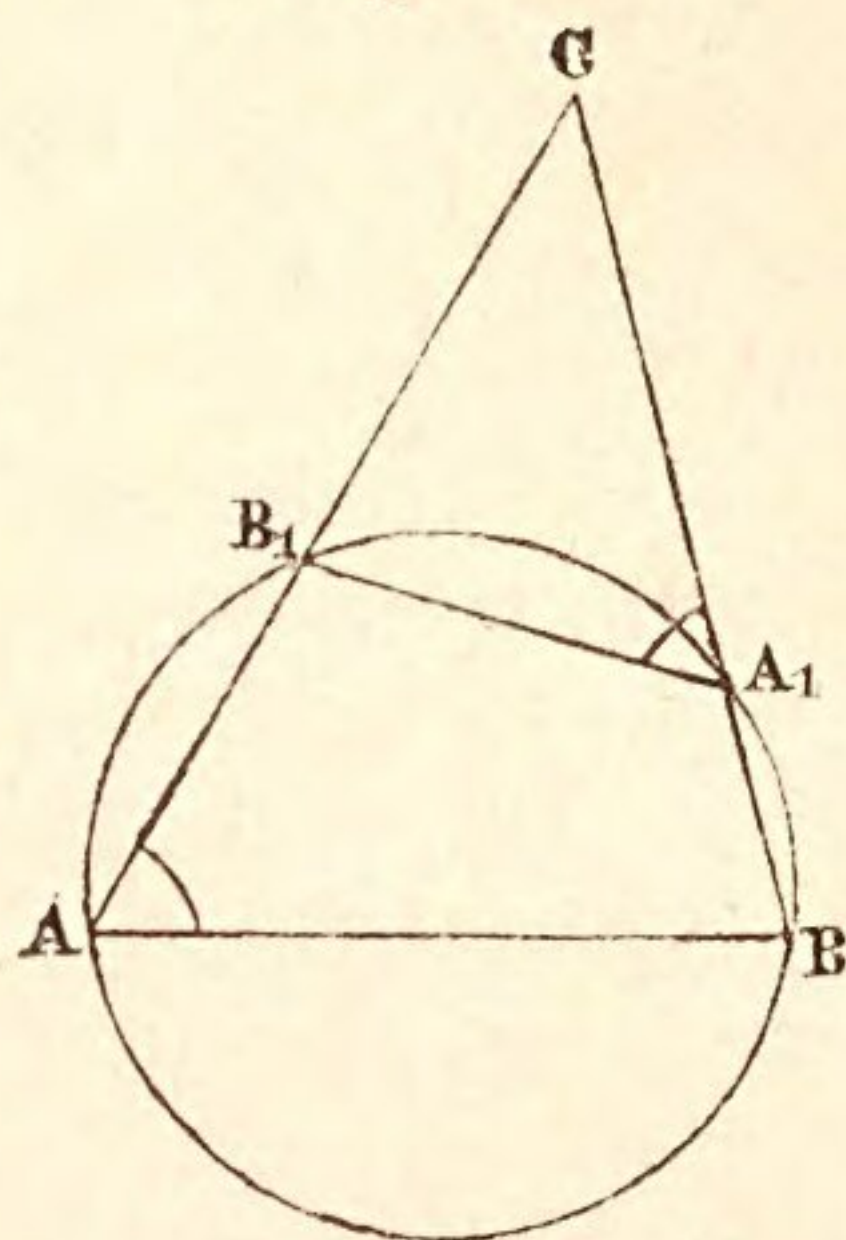
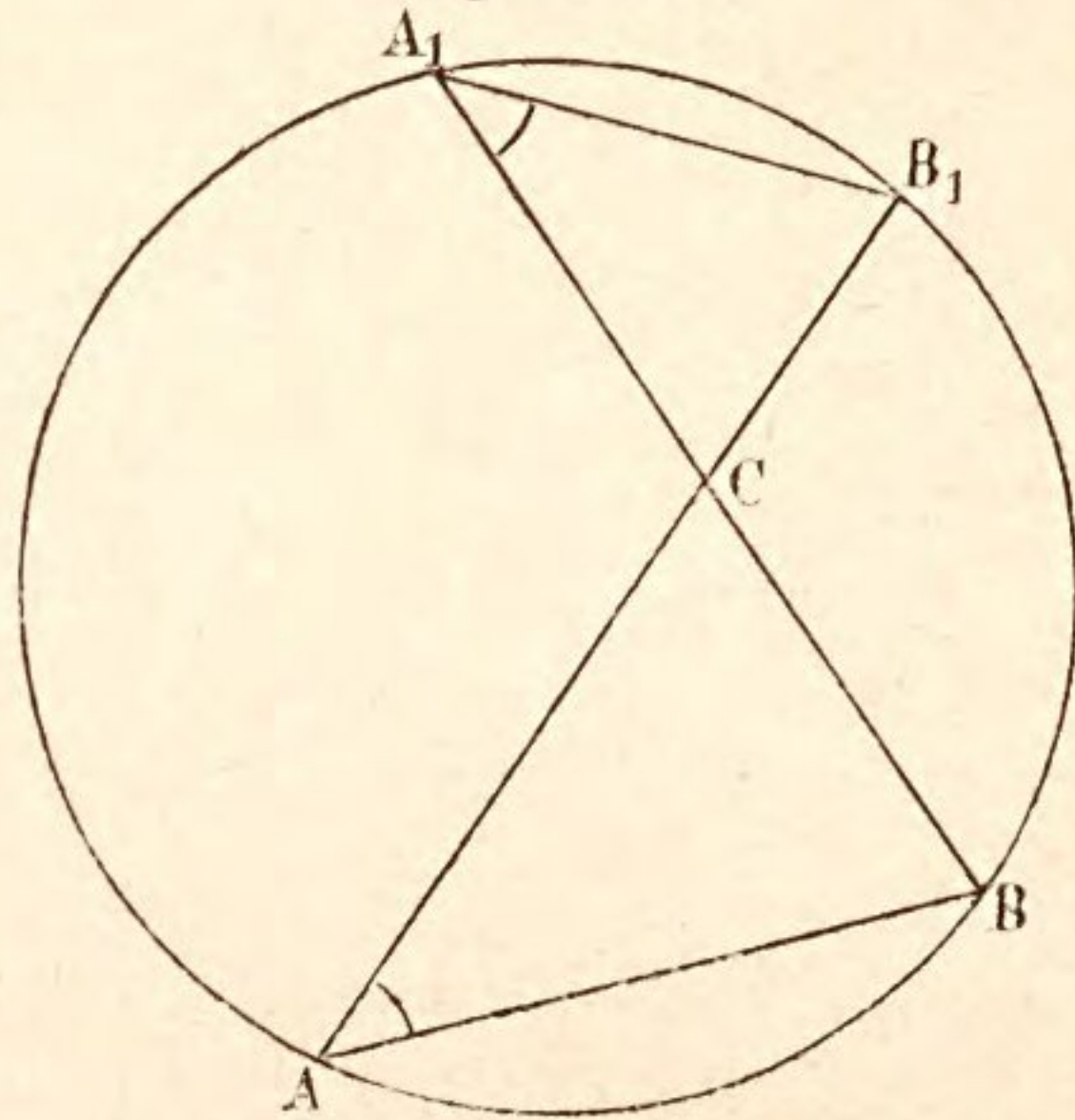


Fig. 73.



\*) Man sagt in diesem Falle auch, dass die vier von  $C$  ausgehenden Strecken eine wiederkehrende Proportion bilden, weil man, um ihre Glieder in richtiger Reihenfolge zu erhalten, von einer der beiden Geraden ( $CA$ ) zur andern übergehen ( $CA_1$  und  $CB$ ), und zuletzt zur ersten ( $CB_1$ ) zurückkehren muss.



Seite ( $BB_1$ ) und dem gegenüberliegenden Winkel überein; d. h.: die Punkte  $A, B, A_1, B_1$  liegen auf derselben Kreislinie (167). Formel 2) giebt hiernach den Satz:

257. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist das Product der vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitte auf der einen so gross wie auf der andern.

Anm. Offenbar ist 257 nur ein specieller Fall von 256. Die Umkehrungen beider Sätze sagen, dass, wenn zwischen 2 von einem Punkt ausgehenden Streckenpaaren auf zwei Geraden die Formel 2) besteht, alsdann die Endpunkte der vier Strecken auf derselben Kreislinie liegen.

Hiernach hat das Product aus den Abständen eines Punktes von den Schnittpunkten einer durch ihn gezogenen Geraden mit dem Kreise denselben Werth, welches auch die Richtung der Secante sei. Dieses Product heisst die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis. Liegt der Punkt ausserhalb der Kreisfläche, so haben beide Strecken dieselbe Richtung, und die Potenz ist positiv; liegt der Punkt innerhalb, so haben beide Strecken entgegengesetzte Richtung, und die Potenz ist negativ; liegt er auf der Kreislinie, so ist die Potenz Null.

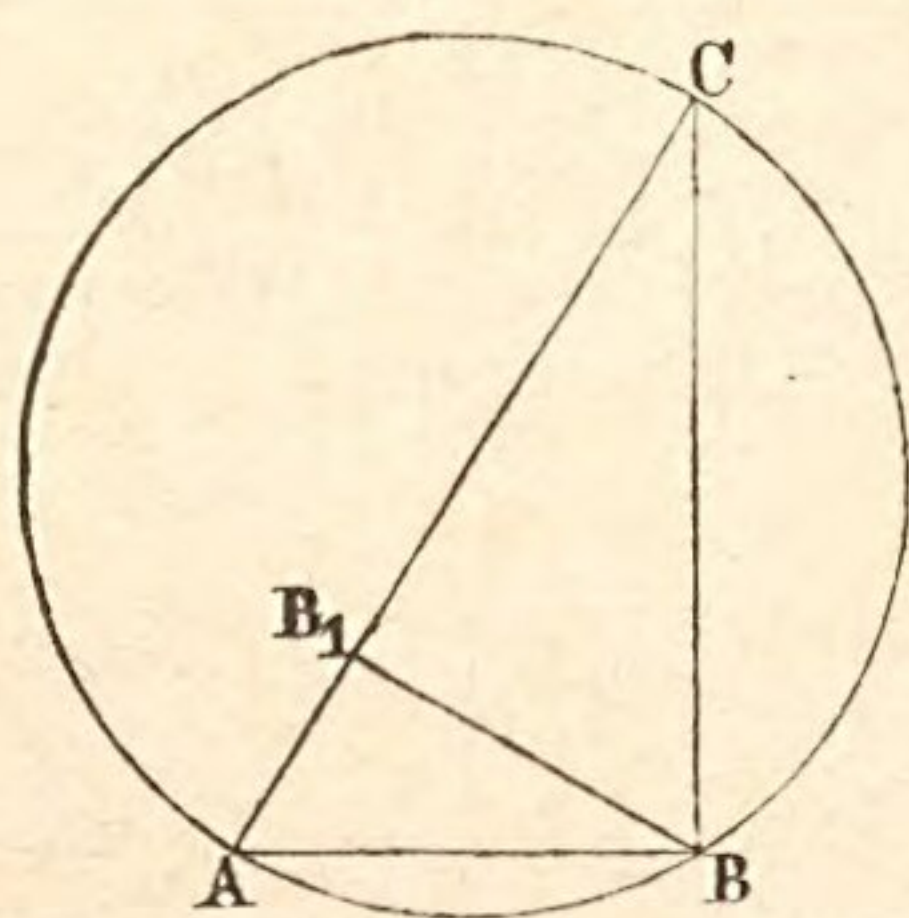
**115. Specielle Fälle.** — 1) Wenn in Fig. 72 die Punkte  $A_1$  und  $B$  in einen einzigen Punkt  $B$  zusammenfallen, so ist  $CB$  Tangente des Kreises, und, da 2) in

$$3) \quad CB^2 = CA \cdot CB_1$$

übergeht, gleichzeitig mittlere Proportionale (Siehe Th. I, Nr. 87) zwischen  $CA$  und  $CB_1$ . Der Satz 256 geht also über in den folgenden:

258. Schneiden sich eine Secante und eine Tangente eines Kreises, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen den beiden vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitten der Secante.

Fig. 74.



2) Wenn im letzten Falle  $AB$  (Fig. 72) ein Durchmesser des Kreises ist, so ist Dreieck  $CAB$  rechtwinklig (182); und, da  $AB_1B = R$  (165) und  $CB_1B = R$  (56), so sind auch die Dreiecke  $AB_1B$  und  $CB_1B$  rechtwinklig und einander ähnlich (245). Hieraus folgt:

$$\frac{CB_1}{B_1B} = \frac{BB_1}{B_1A},$$

oder

$$4) \quad BB_1^2 = B_1C \cdot B_1A.$$

Die Formeln 3) und 4) enthalten nun zusammen den Satz:



Fällt man im rechtwinkligen Dreieck die Höhe 259. aus dem Scheitel des rechten Winkels, so ist 1) jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und ihrem an der Kathete liegenden Abschnitt, 2) die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

Anm. Nennt man  $C, B_1, A$  bzw. die Fusspunkte von  $BC, BB_1, BA$ , so kann man 259 auch so aussprechen: Jede der von  $B$  ausgehenden Strecken ist m. P. zwischen den beiden von ihrem Fusspunkt ausgehenden Strecken.

Der Satz 259 gestattet nun die Lösung der Aufgabe 13. — Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu construiren.

1) Man construirt über der Summe der beiden Strecken ( $CB_1$  und  $AB_1$ ) als Durchmesser einen Kreis und errichtet in ihrem gemeinsamen Endpunkte ( $B_1$ ) auf diesem Durchmesser die Senkrechte ( $B_1B$ ).

2) Man construirt über der grösseren der beiden Strecken ( $CA$  und  $CB_1$ ) als Durchmesser einen Kreis, errichtet in dem Endpunkte ( $B_1$ ) der auf der grösseren abgetragenen kleineren Strecke die Senkrechte ( $B_1B$ ) und verbindet deren Endpunkt ( $B$ ) mit dem gemeinsamen Endpunkte ( $C$ ) beider Strecken.

116.\* *Erweiterung.* — Seien  $A$  und  $B$  die Schnittpunkte zweier Kreislinien  $O$  und  $O_1$ . Zieht man dann aus einem Punkte  $S$  ihrer gemeinsamen Secante an  $O$  die Tangente  $ST$ , an  $O_1$  die Tangente  $ST_1$ , so ist (258)

$$ST^2 = SA \cdot SB = ST_1^2,$$

folglich

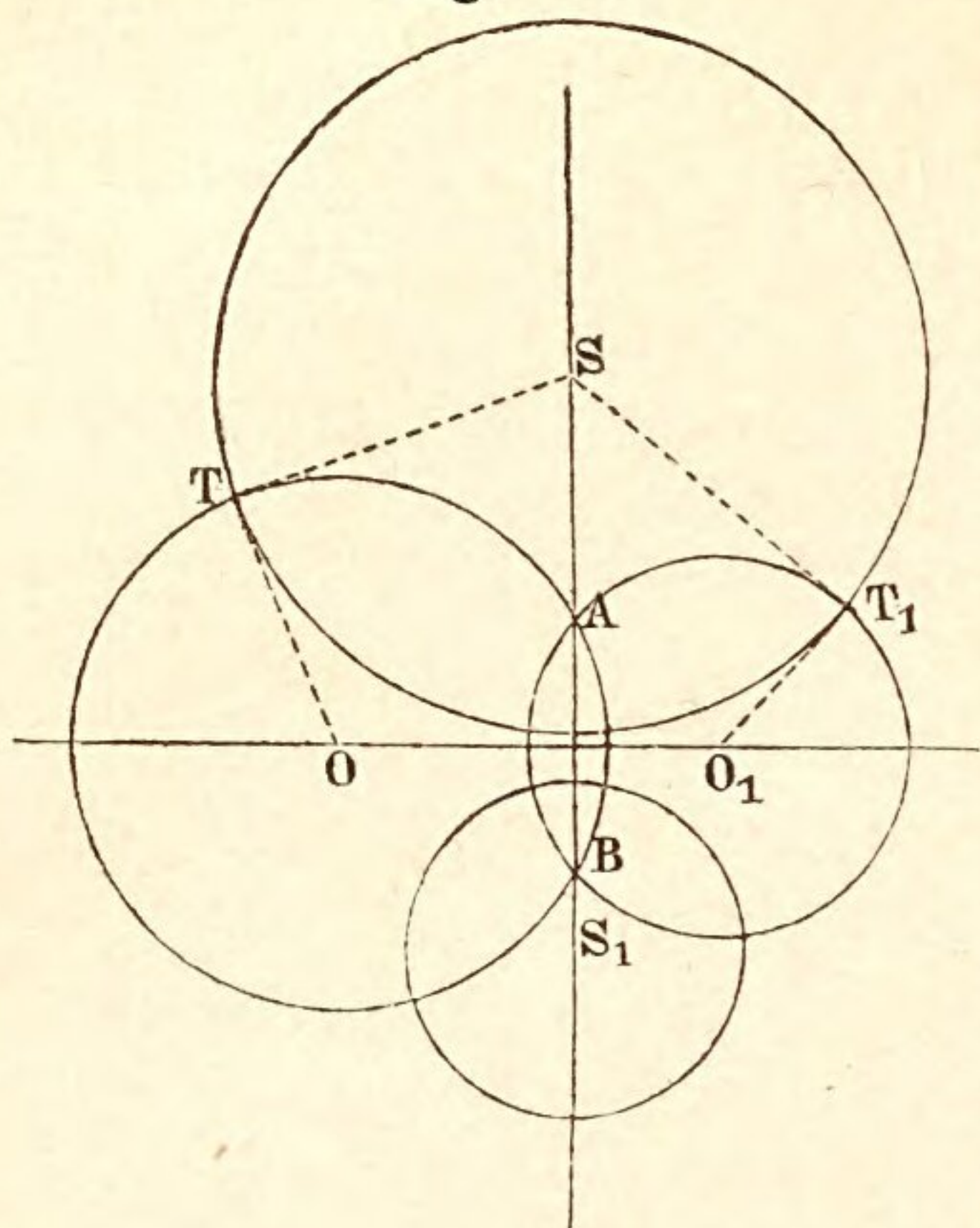
$$ST = ST_1;$$

d. h.: Die aus einem Punkte der gemeinsamen Secante 260. zweier (oder mehrerer) Kreise an dieselben gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Beschreibt man aus  $S$  mit  $ST$  als Radius einen Kreis, so sind die Radien der ersten Kreise,  $OT, O_1T_1, \dots$  Tangenten desselben. Ebenso, wenn man aus anderen Punkten der Secante,  $S_1, S_2, \dots$  mit den an  $O$  gezogenen Tangenten Kreise beschreibt. Das System der Kreise  $O, O_1, \dots$  steht also zu dem System der Kreise  $S, S_1, \dots$  in der Beziehung, dass die Tangenten des einen Systems Radien des andern sind, oder, dass Radien (Tangenten) aller Kreise des einen Systems auf einem Radius (einer Tangente) eines Kreises des andern Systems senkrecht stehen.



Fig. 75.



Nennt man nun den Winkel, welchen die im Schnittpunkte zweier Kreise gezogenen Tangenten mit einander bilden, den Winkel, unter welchem die Kreise sich schneiden, so folgt aus der zuletzt gefundenen Beziehung, dass die Kreise des einen Systems von denen des andern unter rechtem Winkel geschnitten werden.

Einen Kreis, welcher einen anderen unter rechtem Winkel schneidet, nennt man den Orthogonalkreis desselben. — Die Gerade, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass die aus einem dersel-

ben an zwei Kreislinien gezogenen Tangenten einander gleich sind, heisst die Potenzlinie der beiden Kreise. — Man erhält nun weiter folgende Sätze:

261. Die Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise ist ihre gemeinsame Secante, die Potenzlinie zweier sich berührender ihre gemeinsame Tangente im Berührungspunkte.
262. Zu einem Systeme von Kreisen, die sich in zwei Punkten schneiden, gehört ein System von Orthogonalkreisen, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen Secante des ersten liegen. — Die Centrallinie der Kreise des einen Systems ist die Potenzlinie der Kreise des andern. — Die Potenzlinie jedes Systems ist eine Kreislinie desselben mit unendlich fernem Mittelpunkte.
263. Soll eine Kreislinie zwei gegebene Kreislinien unter rechtem Winkel schneiden, so ist der geometrische Ort ihres Mittelpunktes die Potenzlinie der beiden Kreise.

Anm. Construction der Potenzlinie. — Die Potenzlinie der sich schneidenden Kreise  $O$  und  $O_1$  ist nicht nur durch ihre Schnittpunkte ( $A$ ,  $B$ ), sondern auch durch die Punkte  $S$  und  $S_1$  bestimmt, die gefunden werden, wenn man auf 2 beliebigen Tangenten der beiden Kreise beliebige aber gleiche Strecken abträgt, und mit den Verbindungsstrecken ihrer Endpunkte und der Mittelpunkte Kreislinien beschreibt, die sich dann in  $S$  und  $S_1$  schneiden. Diese Construction liefert auch die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreislinien.



Unter den Kreisen des Systems  $O$  ist der kleinste derjenige, welcher  $AB$  zum Durchmesser hat (114). — Da in dem rechtwinkligen Dreieck  $OTS$  die Kathete  $TS$  um so kleiner ist, je kleiner die Hypotenuse  $OS$  ist (118), so sind die Kreise des Systems  $S$  um so kleiner, je näher ihr Mittelpunkt an  $OO_1$  liegt. Es kann aber keiner dieser Mittelpunkte auf der Strecke  $AB$  liegen, weil von Punkten dieser Strecke keine Tangenten an die Kreise des Systems  $O$  gezogen werden können. Da die aus  $A$  und  $B$  an diese Kreise gezogenen Tangentenstrecken die Länge Null haben, so sind auch die Radien der aus  $A$  und  $B$  beschriebenen Kreise des Systems  $S$  gleich Null; d. h. diese Punkte sind die kleinsten Kreise des Systems. In dieser Eigenschaft heissen die Punkte  $A$  und  $B$  Centralpunkte des Systems  $S$ .

Anm. Man kann sagen, dass die Kreise des Systems  $S$  sich in den Punkten  $A$  und  $B$  imaginär schneiden. (Rauml. II. S. 111.)

Es seien drei Kreise  $O_1, O_2, O_3$  gegeben mit den Potenzlinien  $p_1$  (für  $O_2$  und  $O_3$ ),  $p_2$  (für  $O_3$  und  $O_1$ ),  $p_3$  (für  $O_1$  und  $O_2$ ). Aus dem Schnittpunkte von  $p_1$  und  $p_2$  kann man dann eine Kreislinie beschreiben, welche einerseits  $O_2$  und  $O_3$ , andererseits  $O_3$  und  $O_1$ , d. h. auch gleichzeitig die Kreislinien  $O_2$  und  $O_1$  rechtwinklig schneidet. Demnach muss ihr Mittelpunkt auf  $p_3$  liegen (263). Man hat also den Satz:

Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich 264. in einem Punkte.

Der Schnittpunkt der Potenzlinien dreier Kreise heisst ihr Potenzpunkt.

Aus 264 folgt endlich:

Alle Kreislinien, welche die Eigenschaft haben, 265. dass die Potenzlinie je zweier durch denselben Punkt geht, bilden einen Verein, und werden sämmtlich von einer aus diesem Punkte beschriebenen Kreislinie unter rechtem Winkel geschnitten.

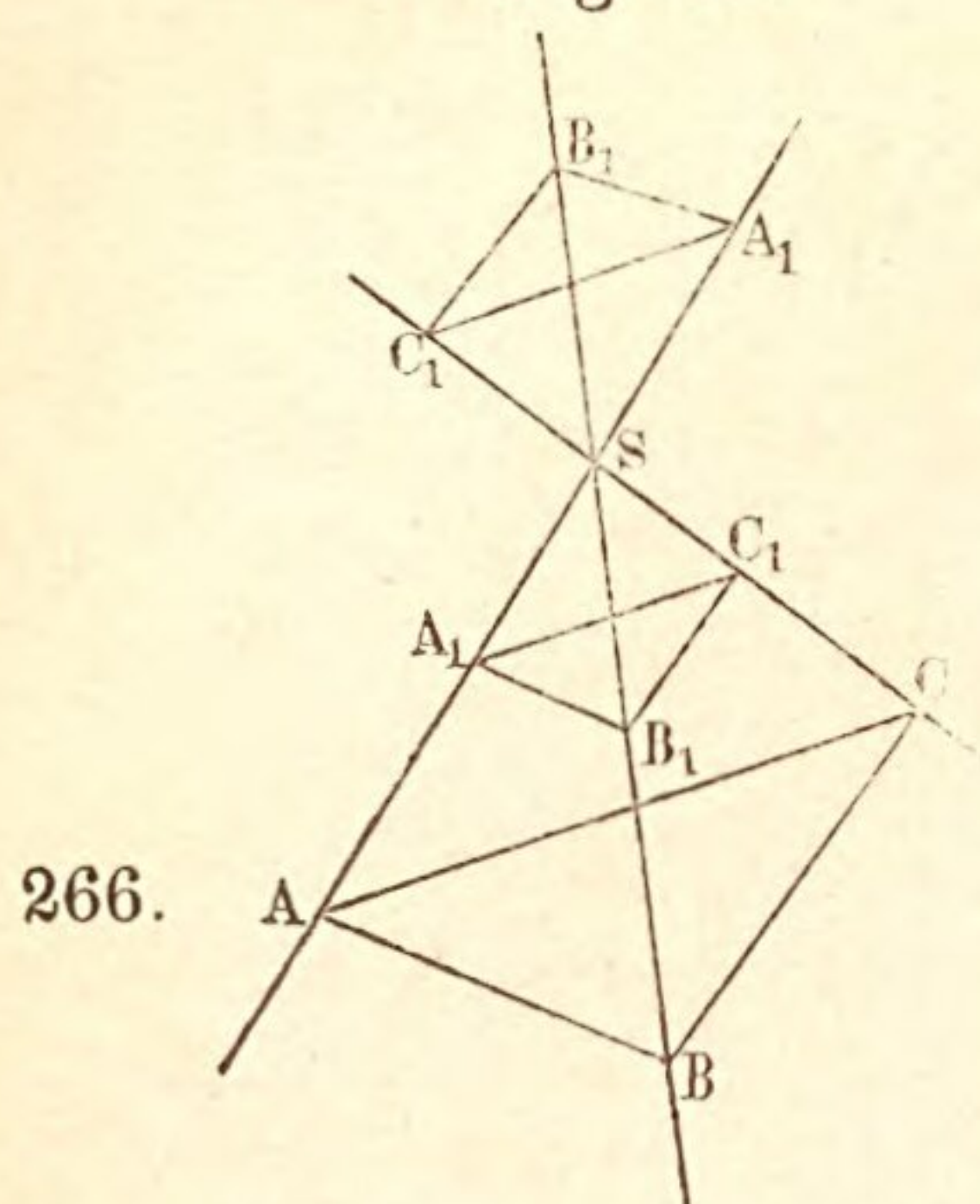
## 2) Polygone.

117. Es seien durch einen Punkt der Ebene ( $S$ ) und durch die Eckpunkte eines Polygons  $\overline{ABC} \dots$  Geraden gezogen. Wählt man auf einer dieser Geraden einen Punkt ( $A_1$ ) beliebig, zieht  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $B_1C_1 \parallel BC$  u. s. w., sodass jedes Parallelenpaar zwischen denselben beiden Geraden liegt, und verbindet den letzten Punkt  $C_1$  mit  $A_1$ , so ist auch  $C_1A_1 \parallel CA$ . [Denn es ist

8\*



Fig. 76.



266.

$\overline{SAB} \sim \overline{SA_1B_1}$ ; also  $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$ ; ferner  
 $\overline{SBC} \sim \overline{SB_1C_1}$ ; also  $\frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1}$ ; mithin  
 $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SC}{SC_1}$ ; ausserdem  $A_1SC_1 = ASC$ ; also  
 $\overline{SAC} \sim \overline{SA_1C_1}$  (246); folglich  $SA_1C_1 = SAC$ ,  
 und  $A_1C_1 \parallel AC$  (70)]. Man hat also den Satz:

Zieht man zwischen mehreren durch einen Punkt gehenden Geraden parallele Streckenpaare so, dass die Endpunkte eines jeden die Anfangspunkte des folgenden sind, und verbindet die letzten beiden Endpunkte mit den ersten beiden Anfangspunkten, so sind auch diese Verbindungslinien parallel.

- Da in Fig. 76 auch  $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$  ist, so hat man, unter der Annahme, dass  $AB \perp SA$  und  $CB \perp SC$  ist, den Satz:  
 267. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen Geraden ein gegebenes Verhältniss haben, ist ein durch ihren Schnittpunkt gehendes Geradenpaar.

Anm. Die nähere Bestimmung dieser Geraden, welche in dem Verhältniss liegt, nach welchem sie den Winkel der gegebenen Geraden theilen, erfordert trigonometrische Betrachtungen. Um sie zu construiren, braucht man nur einen ihrer Punkte zu bestimmen, für den sich (nach 197) zwei geometrische Oerter finden. — Der Satz 267 ist einerseits ein Gegenstück zu 255, andererseits eine Erweiterung von 196.

Die beiden Polygone  $\overline{ABC} \dots$  und  $\overline{A_1B_1C_1} \dots$  haben also folgende Eigenschaften: 1) Je zwei „homologe“ Seiten sind parallel; 2) die Verbindungslinien je zweier „homologer“ Ecken gehen durch denselben Punkt. Vermöge der letzteren Eigenschaft sagt man, dass die Polygone sich in perspectivischer Lage befinden, vermöge beider Eigenschaften, dass sie einander ähnlich sind. Der Punkt  $S$  heisst Aehnlichkeitspunkt, jede durch  $S$  gehende Gerade Aehnlichkeitsstrahl der beiden Polygone. Der Aehnlichkeitspunkt heisst äusserer, wenn zwei homologe Ecken auf derselben, innerer, wenn sie auf verschiedenen Seiten des Aehnlichkeitspunktes liegen. Satz 238 gilt auch für Polygone.

Umkehrung von 266:



Sind in zwei ähnlichen Polygonen zwei homologe 268. Seitenpaare parallel, so gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch *einen* Punkt.

**118. Eigenschaften ähnlicher Polygone.** — 1) Aus der Parallelität ihrer Seiten folgt der Satz:

In zwei ähnlichen Polygonen sind je zwei homologe Winkel einander gleich. 269.

2) Aus den Beziehungen:  $\overline{SAB} \sim \overline{SA_1B_1}$ ;  $\overline{SBC} \sim \overline{SB_1C_1} \dots$   $\overline{SCA} \sim \overline{SC_1A_1}$  folgt (243)

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{SC}{SC_1} \dots = \frac{CA}{C_1A_1};$$

d. h.: In zwei ähnlichen Polygonen sind je zwei homologe Seitenverhältnisse einander gleich. 270.

3) Nach der für die Aehnlichkeit der Polygone aufgestellten Definition sind in Fig. 76 auch die Polygone  $\overline{SABC}$  und  $\overline{SA_1B_1C_1}$  einander ähnlich. Da dieselben durch homologe Diagonalen in die in 1) und 2) betrachteten ähnlichen Polygone und Dreiecke getheilt werden, so hat man den Satz:

Aehnliche Polygone werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Figuren getheilt. 271.

4) Aus den Proportionen  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots = \frac{CA}{C_1A_1}$  folgt (Th. I, 108):

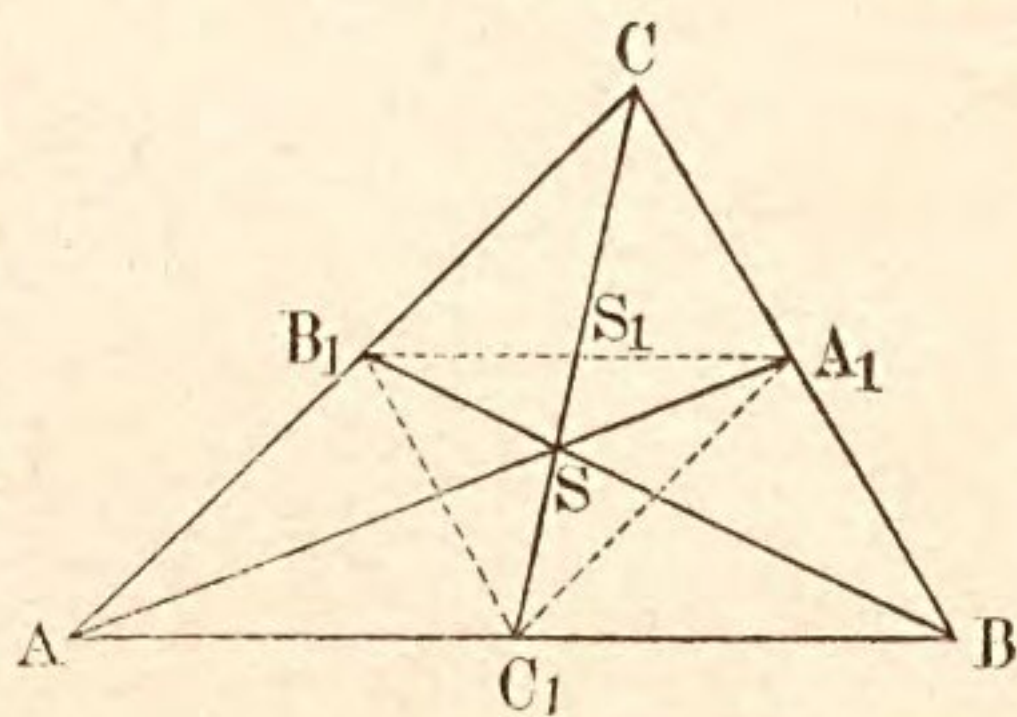
$$\frac{AB + BC + \dots + CA}{A_1B_1 + B_1C_1 + \dots + C_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1};$$

d. h.: Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich 272. wie zwei homologe Seiten (oder Diagonalen).

**119. Erweiterung.** — Verbindet man die Mitten der Seiten eines Dreiecks  $\overline{ABC}$ , so erhält man nach 127 ein Dreieck  $\overline{A_1B_1C_1}$ , welches dem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten denen des gegebenen parallel sind. Mithin gehen (268) die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt ( $S$ ), und da diese Linien die Mittellinien des Dreiecks  $\overline{ABC}$  sind (vgl. Anm. zu Aufg. 2, S. 57), so hat man den Satz:

Die Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich 273. in *einem* Punkte.

Fig. 77.





Der Schnittpunkt der Mittellinien eines Dreiecks heisst sein Schwerpunkt.

Aus  $\overline{ASC_1} \sim \overline{A_1S_1S}$  folgt:

$$\frac{AS}{A_1S} = \frac{AC_1}{A_1S_1} = \frac{BC_1}{A_1S_1},$$

und aus  $\overline{CC_1B} \sim \overline{CS_1A_1}$ :

$$\frac{BC_1}{A_1S_1} = \frac{CB}{CA_1} = \frac{2}{1};$$

folglich:  $\frac{AS}{A_1S} = \frac{2}{1}$  oder  $AS = 2A_1S$ ;

274. d. h.: Die Mittellinien eines Dreiecks theilen sich gegenseitig im Verhältniss von 2:1.

Da  $S$  auch der Schwerpunkt des Dreiecks  $\overline{A_1B_1C_1}$  ist,

so ist  $\frac{C_1S}{SS_1} = \frac{2}{1}$  (274),

ausserdem aber  $\frac{CC_1}{CS_1} = \frac{2}{1}$  (aus  $\overline{CC_1B} \sim \overline{CS_1A_1}$ ),

folglich  $\frac{C_1S}{SS_1} = \frac{CC_1}{CS_1}$ ;

also sind die Punktpaare  $C, S$  und  $C_1, S_1$  harmonisch (Formel 1), S. 108), und man hat den Satz:

275. Die Verbindungslinie der Fusspunkte zweier Mittellinien eines Dreiecks schneidet die dritte Mittellinie in einem Punkte, welcher mit den Endpunkten derselben und dem Schwerpunkte harmonisch ist.

**120.\* Bestimmung der Gestalt eines Polygons durch Winkel und Seitenverhältnisse.** — Die Gestalt eines Polygons ist bestimmt durch seine Winkel und Seitenverhältnisse (vgl. Nr. 110). Im Allgemeinen sind daher zwei Polygone ähnlich, wenn sie in den Winkeln und Seitenverhältnissen übereinstimmen. Nun sind in einem Polygon von  $n$  Seiten alle Seiten bestimmt, wenn man  $n - 1$  Seitenverhältnisse und eine Seite kennt. Da nun durch  $2n - 3$  Stücke das Polygon vollständig bestimmt ist (95), so werden  $2n - 4$  aus Seitenverhältnissen und Winkeln bestehende Stücke seine Gestalt bestimmen und man hat den Satz:

276. Die Gestalt eines  $n$ -Ecks ist durch  $2n - 4$  Seitenverhältnisse oder Winkel bestimmt.



In zwei regelmässigen Polygonen sind alle Seitenverhältnisse gleich 1, und, wenn sie gleiche Seitenzahl haben, sind auch alle Winkel des einen denen des andern gleich. Daraus folgt:

Regelmässige Polygone von gleicher Seitenzahl 277. sind ähnliche Figuren.

Sind in zwei solchen Polygonen die Seiten des einen parallel denen des andern, also z. B.  $a \parallel a_1$ ;  $m \parallel m_1$ , und ist die Zahl der Seiten eine gerade, so hat jede Seite eine ihr parallele gegenüberliegende Seite. Sind also  $a$  und  $m$  zwei solche gegenüberliegende Seiten des einen Polygons, so ist auch  $a \parallel m$ ;  $a_1 \parallel m_1$ . Man kann nun nicht nur  $a$  und  $a_1$ ,  $m$  und  $m_1$  als homologe Seitenpaare betrachten, sondern auch  $a$  und  $m_1$ ,  $m$  und  $a_1$ , und erhält bei der einen Annahme einen äusseren, bei der andern einen inneren Aehnlichkeitspunkt. Also:

Zwei regelmässige Polygone von gleicher und 278. gerader Seitenzahl haben, wenn eine Seite des einen einer Seite des anderen parallel ist, einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt.

Anm. Da die Strecke als regelmässiges Zweieck aufgefasst werden kann, so haben auch zwei Strecken (wie aus Fig. 67 und 68 hervorgeht) zwei Aehnlichkeitspunkte.

**121.\* Homologe Punkte und Geraden.** — Bei zwei ähnlichen Polygonen in perspectivischer Lage heissen die Punkte, in welchen zwei homologe Seiten durch einen Aehnlichkeitsstrahl geschnitten werden, homologe Punkte. Die Verbindungslinien homologer Punktepaare heissen homologe Linien, die Schnittpunkte homologer Linienpaare heissen wieder homologe Punkte.

Aus 266 folgt nun:

Homologe Linien in ähnlichen, perspectivisch 279. liegenden Polygonen sind parallel.

Und aus 268:

Die Verbindungslinien homologer Punkte in ähn- 280. lichen, perspectivisch liegenden Polygonen gehen durch den Aehnlichkeitspunkt (sind also Aehnlichkeitsstrahlen).

Steht ein Aehnlichkeitsstrahl (SA Fig. 76) auf zwei homologen Seiten ( $AB$  und  $A_1B_1$ ) senkrecht, so liefert die Formel

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SA}{SA_1} \text{ den Satz:}$$

Die Abstände eines Aehnlichkeitsstrahls von zwei 281.



homologen Punkten verhalten sich wie zwei homologe Seiten (und umgekehrt).

Da der Punkt  $S$  (Fig. 76) gemeinsamer Eckpunkt der beiden ähnlichen Polygone  $\overline{SABC}$  und  $\overline{SA_1B_1C_1}$  ist, so kann man sagen, dass in ihm zwei homologe Punkte zusammenfallen, oder, dass er ein homologer Doppelpunkt ist. Da nun die Geraden  $SA$  und  $SA_1$  homologe Geraden sind und in eine einzige Gerade zusammenfallen, so kann man sagen, dass die Gerade  $SA$  eine homologe Doppellinie sei. Also:

282. Der Aehnlichkeitspunkt zweier Polygone ist ein homologer Doppelpunkt, jeder Aehnlichkeitsstrahl eine homologe Doppellinie.

**122.\* Erweiterung.** — Es seien  $A_1, A_2, A_3$  drei homologe Eckpunkte ähnlicher Polygone 1, 2 und 3, und  $a_1, a_2, a_3$  drei homologe Seiten derselben. Ferner seien je drei homologe Seiten parallel. Es sei  $S_1$  der Aehnlichkeitspunkt von 2 und 3,  $S_2$  der von 3 und 1,  $S_3$  der von 1 und 2. Endlich seien  $h_1, h_2, h_3$  die Abstände der Punkte  $A_1, A_2, A_3$  von der Geraden  $S_1S_2$ . Da diese Gerade Aehnlichkeitsstrahl sowohl für das Paar 13 wie für 23 ist, so ist nach 281

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{a_1}{a_3}; \quad \frac{h_3}{h_2} = \frac{a_3}{a_2};$$

folglich:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

In Folge dessen ist (nach der Umkehrung zu 281) die Gerade  $S_1S_2$  auch Aehnlichkeitsstrahl des Paares 12, und geht daher durch  $S_3$ . Man hat also den Satz:

283. Die Aehnlichkeitspunkte dreier ähnlicher Polygone, von denen je zwei sich in perspectivischer Lage befinden, liegen auf einer Geraden.

### 3) Kreise.

**123. Zwei Kreise.** — Da nach 222 die Kreislinie als regelmässiges Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, so gelten die für Polygone, speciell für regelmässige Polygone aufgestellten Sätze (sofern sie nicht Winkel oder Seiten betreffen) auch für Kreise. Also:

284. Kreise sind ähnliche Figuren (277).

285. Zwei Kreise haben stets einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt (278).



Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie 286. ihre (Durchmesser oder) Radien (272).

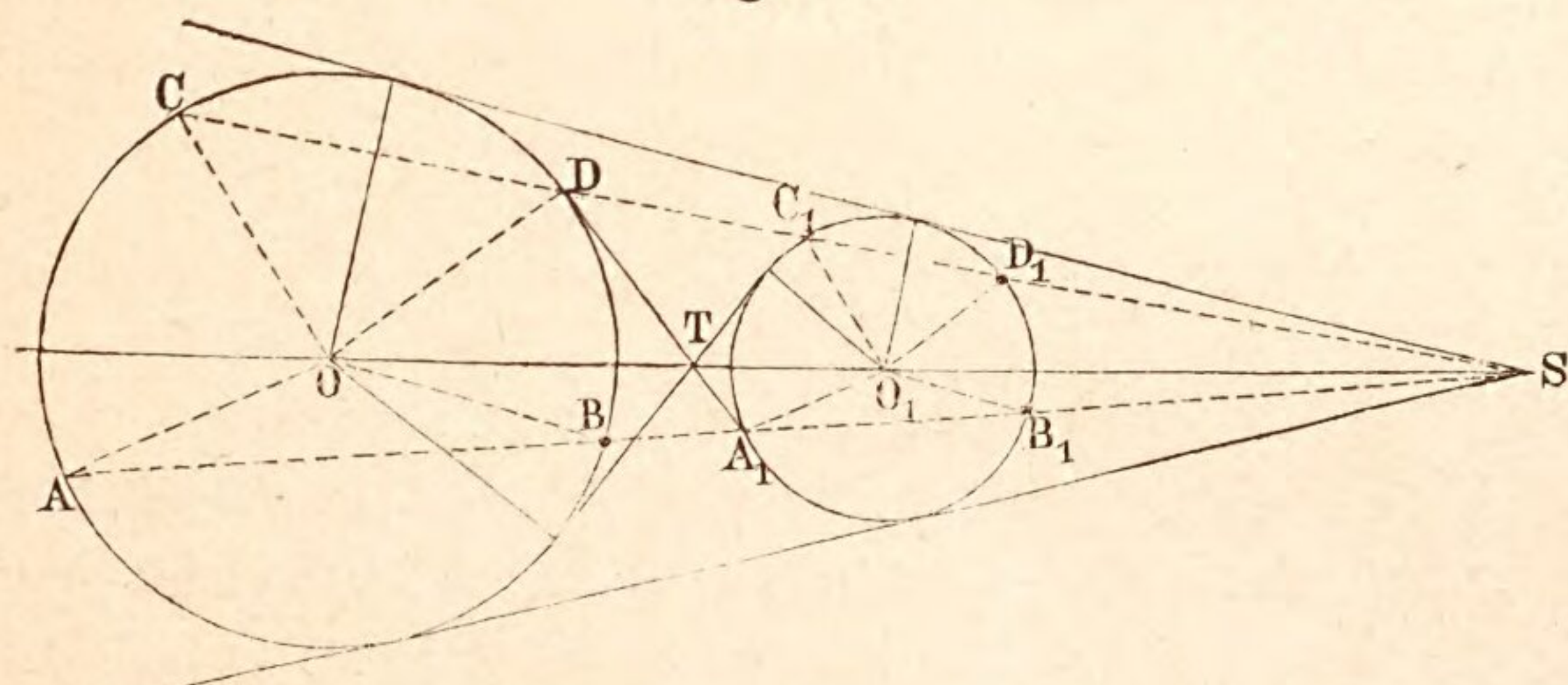
Zwei Bogen oder Sektoren desselben Kreises ver- 287. halten sich wie ihre Centriwinkel (151).

124. *Eine gemeinsame Secante.* — Da parallele Durchmesser zweier Kreise als homologe Diagonalen angesehen werden können, so sind parallele Durchmesser oder Radien homologe Linien, mithin die Mittelpunkte der Kreise, sowie die Endpunkte paralleler Radien homologe Punkte. Hieraus folgt (280):

Die Centrallinie zweier Kreise geht durch die 288. Aehnlichkeitspunkte.

Verbindet man die Endpunkte paralleler Radien 289. zweier Kreise, so geht die Verbindungslinie durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt, wenn die Radien gleiche, durch den inneren, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

Fig. 78.



Zieht man aus einem Aehnlichkeitspunkte zweier 290. Kreise eine gemeinsame Secante, so sind die nach den homologen Schnittpunkten gezogenen Radien parallel. (Umk. v. 289.)

Steht also in dem einen Kreise der Radius auf der Secante senkrecht (was der Fall ist, wenn die Secante in eine Tangente übergeht), so findet dasselbe auch in dem andern Kreise statt, d. h.:

Die aus einem Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise 291. an den *einen* gezogenen Tangenten berühren auch den *andern*.

Zwei Kreise haben hiernach vier gemeinsame Tangenten. Die beiden durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt gehenden Tangenten heissen äussere, die durch den inneren gehenden innere.



Anm. Anwendung der Lehre von den inneren und äusseren Tangenten zweier Kreise auf die Theorie des Schattens einer dunklen Kugel unter dem Einfluss einer leuchtenden, insbesondere auf die Theorie der Sonnen- und Mondfinsternisse. — Construction der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise mittelst der Centrallinie und zweier paralleler Radien. — Construction der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mittelst der Aehnlichkeitspunkte.

Ist durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise ( $S$ ) eine gemeinsame Secante gezogen, die den Kreis  $O$  in  $A$  und  $B$ , den Kreis  $O_1$  in  $A_1$  und  $B_1$  schneidet, so ist

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SO}{SO_1} = \frac{SB}{SB_1} \quad (290, 241);$$

folglich:

$$SA \cdot SB_1 = SB \cdot SA_1;$$

292. d. h.: Zieht man aus einem Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise eine gemeinsame Secante, so sind die Producte aus den Abständen je zweier nicht homologer Schnittpunkte vom Aehnlichkeitspunkte einander gleich.

**125.\*** *Zwei gemeinsame Secanten.* — Ist durch  $S$  noch eine zweite Secante mit den Schnittpunkten  $C$  und  $D$ ,  $C_1$  und  $D_1$  gezogen, so ist

$$\frac{SC}{SC_1} = \frac{SO}{SO_1} = \frac{SB}{SB_1};$$

also

$$SC \cdot SB_1 = SB \cdot SC_1;$$

293. d. h.: Auf allen durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gezogenen Secanten sind die Producte aus den Abständen je zweier nicht homologer Schnittpunkte vom Aehnlichkeitspunkte einander gleich.

Zwei solche nicht homologe Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahles zweier Kreise heissen potenzhaltende Punkte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt.

Anm. Was wird aus den Sätzen 292 und 293, wenn eine Secante in eine Tangente übergeht?

Sei  $r$  der Radius des Kreises  $O$ , und  $r_1$  der des Kreises  $O_1$ , ferner  $S$  der äussere und  $T$  der innere Aehnlichkeitspunkt beider Kreise, so ist

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{TO}{TO_1};$$

d. h.: Die Punktepaare  $ST$  und  $O_1O$  sind harmonisch, oder:

294. Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise sind harmonisch zu ihren Mittelpunkten, der innere theilt die Centrallinie im Verhältniss der Radien.



Anm. Wo liegen die Aehnlichkeitspunkte, und was wird aus den gemeinsamen Tangenten zweier Kreise in den 5 einzelnen, in Nr. 105 zusammengestellten Fällen? Ferner, wenn eine der beiden Kreislinien in einen Punkt oder eine Gerade übergeht?

Die über  $ST$  (Fig. 78) als Durchmesser beschriebene Kreislinie hat nun nach 255 die Eigenschaft, dass für jeden ihrer Punkte  $X$  das Verhältniss seiner Abstände von  $O$  und  $O_1$  dasselbe ist, nämlich  $r:r_1$ . Man hat also:

$$\frac{XO}{XO_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Zieht man nun aus  $X$  an die Kreislinien  $O$  und  $O_1$  bezw. die Tangenten  $XY$  und  $XY_1$ , so ist  $OY=r$ ,  $O_1Y_1=r_1$ ; daher sind nach der letzten Proportion die rechtwinkligen Dreiecke  $\overline{OXY}$  und  $\overline{O_1XY_1}$  ähnlich (247), und die Winkel  $OXY$  und  $O_1XY_1$  einander gleich. Da diese Winkel aber die Hälften derjenigen Winkel sind, welche die aus  $X$  an jede Kreislinie gezogenen Tangenten mit einander bilden (187), so hat man den Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, von welchem 295. aus zwei Kreise unter gleichem Winkel erscheinen, ist die über der Verbindungsstrecke ihrer Aehnlichkeitspunkte als Durchmesser beschriebene Kreislinie.

Anm. Specieller Fall, wenn die Kreise gleich gross sind.

**126.\* Drei Kreise.** — Es seien drei Kreise  $O_1, O_2, O_3$  gegeben; ferner sei

$S_1$  der äussere,  $T_1$  der innere Aehnlichkeitspunkt von  $O_2$  und  $O_3$ ;  
 $S_2$  » »  $T_2$  » » » »  $O_3$  »  $O_1$ ;  
 $S_3$  » »  $T_3$  » » » »  $O_1$  »  $O_2$ .

Nehmen wir an, dass zwei Kreise ihren äusseren oder ihren inneren Aehnlichkeitspunkt liefern, jenachdem sie gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, so sind folgende Zusammenstellungen der Zeichen möglich:

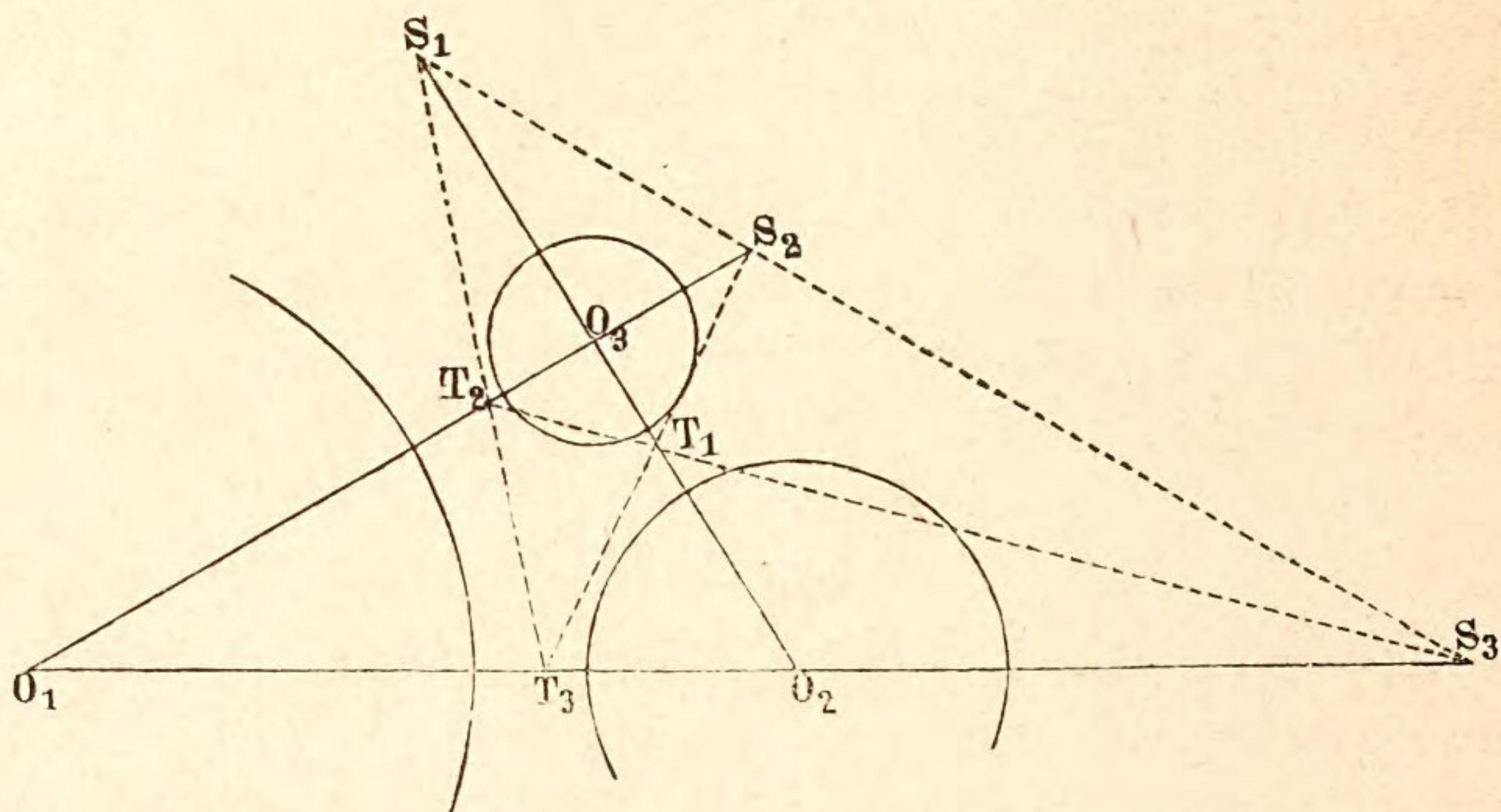
|    | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|----|-------|-------|-------|
| 1) | +     | +     | +     |
| 2) | +     | +     | —     |
| 3) | +     | —     | +     |
| 4) | —     | +     | +     |

Da in jedem dieser vier Fälle der Satz 283 gilt, so liegen auf einer Geraden: 1)  $S_1S_2S_3$ , 2)  $T_1T_2S_3$ , 3)  $T_1S_2T_3$ , 4)  $S_1T_2T_3$ ; d. h.:

\*) Stellt man durch Umkehrung aller Zeichen die noch übrigen 4 Fälle her, so sieht man leicht, dass dieselben keine neuen Beziehungen liefern.



Fig. 79.



296. Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf einer Geraden, ebenso je zwei innere mit dem dritten äusseren

Die 4 Geraden, auf welchen je drei Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen, heissen Aehnlichkeitsaxen, und zwar diejenige die äussere, auf welcher die äusseren Aehnlichkeitspunkte liegen, die andern die inneren.

Werden zwei Kreise ( $O_1$  und  $O_2$ ) von einem dritten ( $O_3$ ) berührt, so sind die Punkte  $T_1$  und  $T_2$  die Berührungspunkte, und der zweite Theil des Satzes 296 lautet jetzt:

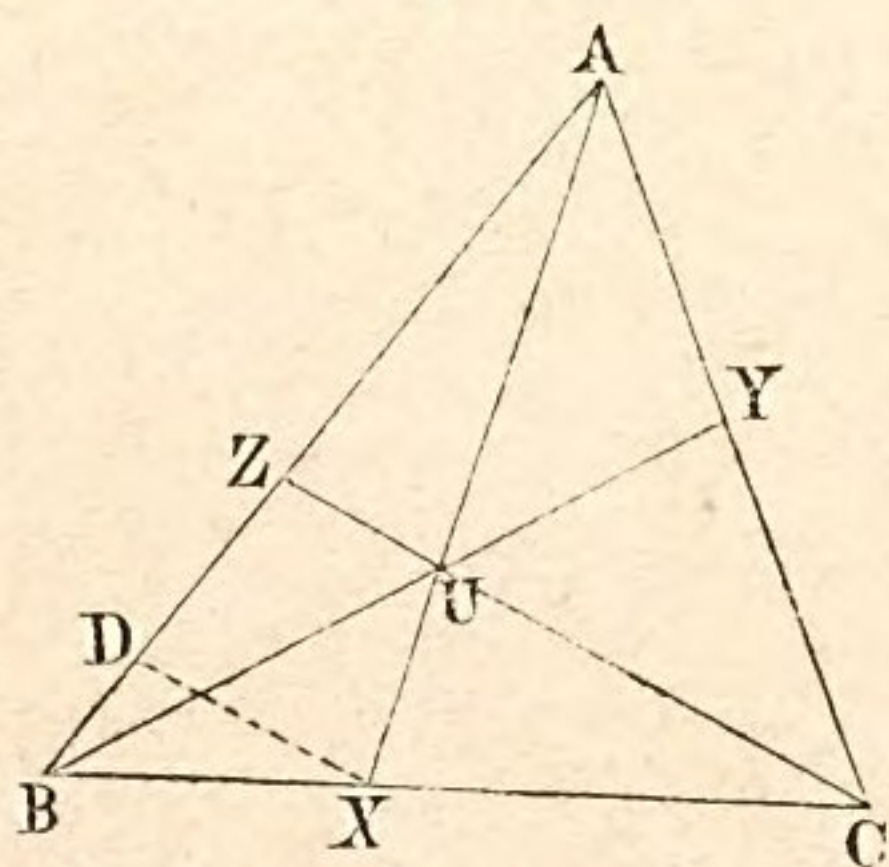
297. Der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise, die von einem dritten berührt werden, liegt mit den beiden Berührungspunkten auf derselben Geraden.

## II. Die Collineation.

### 1) Das vollständige Viereck.

**127.\* Vorbemerkung.** — Durch Ziehen einer zu einer Dreiecksseite parallelen Strecke zwischen den beiden andern

Fig. 80.



Seiten erhielt man auf einfachste Weise ein ähnliches Dreieck in perspectivischer Lage. — Dem entsprechend wird durch Ziehen einer nicht parallelen Strecke  $ZU$  zwischen den Seiten eines Dreiecks  $ABX$  in einfachster Weise ein collineares Dreieck  $AZU$  in perspectivischer Lage abgeschnitten. Es wird nun zu bestimmen sein, welche Beziehungen zwischen den durch diese Construction entstehenden Strecken stattfinden, wenn man sowohl



die Seiten des Dreiecks, wie die Strecke  $ZU$  beliebig verlängert denkt. Der Kürze wegen mögen die Geraden, auf welchen die Seiten des Dreiecks liegen, seine Seitenlinien heissen.

**128.\*** *Das Doppelverhältniss.* — Die zwischen den Seiten zweier ähnlicher Dreiecke bestehende Beziehung  $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$  (Formel (1) Nr. 109) kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{SA}{SA_1} \cdot \frac{SB_1}{SB} = 1.$$

Die linke Seite dieser Formel heisst ein Doppelverhältniss. Ein einfaches Verhältniss ist positiv, wenn seine beiden Strecken gleiche, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Ein Doppelverhältniss ist hiernach positiv oder negativ, je nachdem seine beiden Verhältnisse gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Demnach kann die Beziehung zwischen den Abständen von vier harmonischen Punkten (Formel (1) Nr. 112)  $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$  in der Form geschrieben werden:

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} = -1,$$

weil das erste Verhältniss negativ, das zweite positiv ist.

In dem letzten Doppelverhältniss kann man den Nenner  $BC_1 \cdot AC_2$  aus dem Zähler  $AC_1 \cdot BC_2$  dadurch herstellen, dass man jeden Endfactor mit dem folgenden Anfangsfactor (demnach den letzten Endfactor mit dem ersten Anfangsfactor) zu einem Producte verbindet. Dadurch erhält man  $C_1B \cdot C_2A$ , welches Product mit  $BC_1 \cdot AC_2$  gleiches Vorzeichen hat. — Mit Rücksicht auf diesen Zusammenhang zwischen Zähler und Nenner kann man das letzte Doppelverhältniss abgekürzt in der Form schreiben

$$(AC_1 \cdot BC_2),$$

wodurch gleichzeitig die Reihenfolge der Punkte (vgl. Fig. 70) ausgedrückt ist. Hiernach kann man die Beziehung zweier harmonischer Punktpaare in dem Satze aussprechen:

Das Doppelverhältniss zwischen den Abständen zweier harmonischer Punktpaare ist gleich  $(-1)$ , und umgekehrt. 298

**129.\*** *Das Tripelverhältniss.* — Eine Gerade (Fig. 80) schneide die Seitenlinien eines Dreiecks  $ABX$ , und zwar  $AB$



in  $Z$ ,  $BX$  in  $C$ ,  $XA$  in  $U$ . Zieht man dann  $XD \parallel CZ$ , und verbindet  $A$  mit  $C$ , so ist

$$\overline{BXD} \sim \overline{BCZ}; \overline{AUZ} \sim \overline{AXD};$$

also: 
$$\frac{XC}{BC} = \frac{DZ}{BZ}; \quad \frac{AU}{XU} = \frac{AZ}{DZ};$$

multiplicirt: 
$$\frac{XC \cdot AU}{BC \cdot XU} = \frac{AZ}{BZ},$$

oder: 
$$XC \cdot BZ \cdot AU = BC \cdot AZ \cdot XU;$$

299. d. h.: Werden die Seitenlinien eines Dreiecks von einer Geraden geschnitten, so ist unter den 6 Abständen der Schnittpunkte von den Endpunkten der zugehörigen Seiten das Product von drei nicht anstossenden Strecken gleich dem Producte der drei anderen.

Die letzte Formel kann man auch schreiben:

$$\frac{XC}{BC} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AU}{XU} = 1, \text{ oder } \frac{XC}{CB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AU}{UX} = -1,$$

oder, da der Nenner aus dem Zähler auf dieselbe Weise hervorgeht, wie beim Doppelverhältniss harmonischer Punkte:

$$(XC \cdot BZ \cdot AU) = -1.$$

Anm. In dieser Formel folgt auf jede Ecke des Dreiecks der Schnittpunkt auf einer anstossenden Seite und dann der andere Endpunkt derselben Seite. Nach dieser Bemerkung ist die Formel für jedes Dreieck leicht herzustellen.

Die linke Seite der letzten Formel heisst ein Tripelverhältniss (Dreieckschnittverhältniss). Demnach kann Satz 299 auch so ausgesprochen werden:

300. Das Tripelverhältniss zwischen den Abständen der Ecken eines Dreiecks von den Schnittpunkten einer seine Seitenlinien schneidenden Geraden ist gleich  $-1$ .
301. Umgekehrt: Drei Punkte auf den Seitenlinien eines Dreiecks liegen auf einer Geraden, wenn das Tripelverhältniss ihrer Abstände von den Ecken des Dreiecks gleich  $-1$  ist.

Ist  $ZU \parallel BX$ , so rückt  $C$  in unendliche Entfernung, folglich ist  $BC = XC$ , und die Formel  $\frac{XC}{BC} \cdot \frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{AU}{XU} = 1$  geht über



in  $\frac{BZ}{AZ} = \frac{XU}{AU}$ . Die Aehnlichkeit erweist sich hierdurch, wie vorauszusehen war, als specieller Fall der Collineation.

Anm. Die Figur 80 enthält im Ganzen 6 Dreiecke, deren Seitenlinien von je einer (nicht durch eine Ecke gehenden) Geraden geschnitten werden. Es schneidet nämlich

die Dreiecke  $\overline{BCY}$ ,  $\overline{BCZ}$ ,  $\overline{CAZ}$ ,  $\overline{CAX}$ ,  $\overline{ABX}$ ,  $\overline{ABY}$ .

Nach 299 ist 1) für das Dreieck  $\overline{ABX}$ , geschnitten von  $CZ$ :

$$XC \cdot BZ \cdot AU = BC \cdot AZ \cdot XU,$$

2) für das Dreieck  $\overline{ACX}$ , geschnitten von  $BY$ :

$$CB \cdot XU \cdot AY = XB \cdot AU \cdot CY.$$

Durch Multiplication dieser beiden Formeln erhält man:

$$XC \cdot BZ \cdot AY = AZ \cdot XB \cdot CY,$$

oder: 
$$\frac{XC}{BX} \cdot \frac{YA}{CY} \cdot \frac{ZB}{AZ} = +1,$$

oder: 
$$(XC \cdot YA \cdot ZB) = +1;$$

d. h.: Verbindet man einen beliebigen Punkt der Ebene 302. ( $U$ ) mit den Ecken eines Dreiecks ( $\overline{ABC}$ ), so ist das Tripelverhältniss zwischen den Abständen der Ecken von den Schnittpunkten dieser Verbindungslinien gleich  $+1$ .

Umgekehrt: Drei durch die Ecken eines Dreiecks 303. gezogene Geraden gehen durch einen Punkt, wenn das Tripelverhältniss der Abstände ihrer Schnittpunkte von den Ecken des Dreiecks gleich  $+1$  ist.

Anm. Die Sätze 302 u. 303 sind reciprok zu 300 u. 301. (Vgl. Nr. 76.)

**130.\* Das Quadrupelverhältniss.** — Eine Gerade  $AC$  (Fig. 80) schneide die Seitenlinien eines Vierecks  $\overline{BXUZ}$ , und zwar  $BZ$  und  $XU$  in  $A$ ,  $BX$  und  $ZU$  in  $C$ . Dann ist nach 299

1) für das Dreieck  $\overline{BXU}$ , geschnitten von  $AC$ :

$$BC \cdot XA \cdot UY = XC \cdot UA \cdot BY,$$

2) für das Dreieck  $\overline{BZU}$ , geschnitten von  $AC$ :

$$BA \cdot ZC \cdot UY = ZA \cdot UC \cdot BY;$$

also, wenn man die linke Seite jeder dieser Formeln mit der rechten Seite der anderen multiplicirt:

$$BC \cdot XA \cdot ZA \cdot UC = BA \cdot ZC \cdot XC \cdot UA.$$



Durch Verlängerung je zweier gegenüberliegender Seiten eines Vierecks ( $BXUZ$ ) bis zu den Schnittpunkten ( $A$  und  $C$ ) entsteht ein vollständiges Viereck (s. Anm. zu Nr. 78), in welchem die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten die dritten Ecken heissen mögen. Die letzte Formel enthält nun den Satz:

304. Bildet man im vollständigen Viereck die vier Producte aus den Abständen der dritten Ecken von je zwei gegenüberliegenden Ecken, so geben zwei dieser Producte, die verschiedene Ecken und dritte Ecken enthalten ( $CB \cdot CU$ ,  $AZ \cdot AX$ ), mit einander multiplicirt, dasselbe Product, wie die beiden andern ( $CZ \cdot CX$ ,  $AB \cdot AU$ ).

Anm. Satz 304 würde, wenn die schneidende Linie die Seiten des Vierecks in vier (statt in zwei) verschiedenen Punkten träfe, die Erweiterung von 299 auf das Viereck sein.

Die letzte Formel kann man auch schreiben:

$$\frac{BC}{XC} \cdot \frac{XA}{UA} \cdot \frac{UC}{ZC} \cdot \frac{ZA}{BA} = 1,$$

oder, da der Nenner aus dem Zähler auf dieselbe Weise hervorgeht, wie beim Tripelverhältniss:

$$(BC \cdot XA \cdot UC \cdot ZA) = +1.$$

Die linke Seite der letzten Formel heisst ein Quadrupelverhältniss (Viereckschnittverhältniss). Demnach kann Satz 304 auch so ausgesprochen werden:

305. Im vollständigen Viereck ist das Quadrupelverhältniss zwischen den Abständen seiner Ecken von seinen dritten Ecken gleich  $+1$ .

Endlich kann die letzte Formel auch geschrieben werden:

$$\frac{BC}{XC} \cdot \frac{XA}{BA} = \frac{ZC}{UC} \cdot \frac{UA}{ZA},$$

oder:  $(BC \cdot XA) = (ZC \cdot UA)$ .

Der Inbegriff beliebig vieler durch einen Punkt ( $A$ ) gehenden Geraden (Strahlen) wird ein Strahlenbüschel genannt (speciell Strahlenbündel, wenn die Geraden parallel sind) und durch ( $A$ ) bezeichnet.  $A$  heisst der Scheitel des Strahlenbüschels. In Fig. 80 wird der dreigliedrige Strahlenbüschel ( $A$ ) von der Geraden  $ZC$  in den Punkten  $Z$ ,  $U$ ,  $C$ , und von der Geraden  $BC$  in den Punkten  $B$ ,  $X$ ,  $C$  geschnitten. Die letzte Formel sagt nun aus, dass in diesem Falle das Doppelverhältniss ( $BC \cdot XA$ ) für jede Richtung der schneidenden Geraden



denselben Werth hat. Da dasselbe für alle parallelen Geraden, d. h. auch für jede Lage der schneidenden Geraden stattfindet (nach den Eigenschaften ähnlicher Dreiecke), so gilt allgemein der Satz:

Für alle Geraden, welche einen dreigliedrigen 306. Strahlenbüschel ( $A$ ) in den Punkten  $B, X, C$  schneiden, hat das Doppelverhältniss  $(BC.XA)$  denselben Werth.

Ein vierter Strahl des Strahlenbüschels ( $A$ ) werde von der Geraden  $CU$  in  $U_1$ , von  $CX$  in  $X_1$  geschnitten. Dann ist

1) für das Dreieck  $\overline{CZB}$ , geschnitten von  $AX$ :

$$CX.BA.ZU = BX.ZA.CU$$

2) für dasselbe Dreieck, geschnitten von  $AX_1$ :

$$CX_1.BA.ZU_1 = BX_1.ZA.CU_1;$$

also, wenn man die linke Seite jeder dieser Formeln mit der rechten Seite der andern multiplicirt:

$$CX.ZU.BX_1.CU_1 = CX_1.ZU_1.BX.CU,$$

oder: 
$$\frac{CX}{BX} \cdot \frac{BX_1}{CX_1} = \frac{CU}{ZU} \cdot \frac{ZU_1}{CU_1},$$

oder: 
$$(CX.BX_1) = (CU.ZU_1);$$

d. h.: Ein viergliedriger Strahlenbüschel schneidet alle 307. Geraden unter demselben Doppelverhältniss.

Ist dieses Doppelverhältniss gleich  $-1$ , so sind die vier Punkte harmonisch (298), und der letzte Satz nimmt die spezielle Form an:

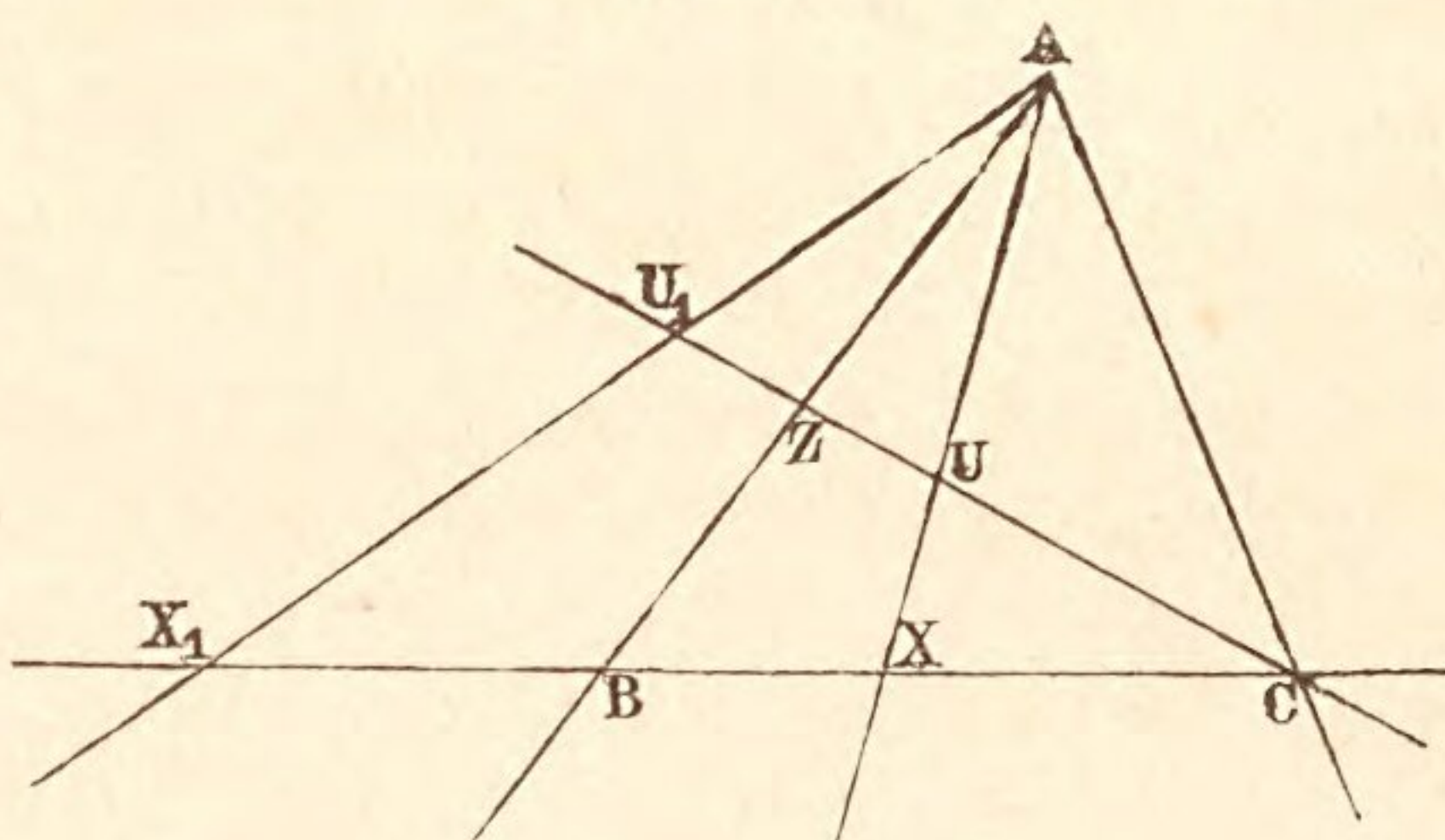
Ein durch vier harmonische Punkte gehender (*har-* 308. *monischer*) Strahlenbüschel schneidet jede Gerade in 4 harmonischen Punkten.

Anm. Wie sind die harmonischen Punkte beschaffen, wenn die schneidende Gerade zu einem Strahle parallel oder senkrecht ist?

In Fig. 71 ist ( $C$ ) ein harmonischer Strahlenbüschel; man hat also den Satz:

Zwei sich schneidende Geraden bilden mit den 309. Halbirungslinien ihrer Winkel einen harmonischen Strahlenbüschel.

Fig. 81.





**131.\* Collineare Punktreihen.** — Der Inbegriff beliebig vieler auf einer Geraden ( $a$ ) liegenden Punkte wird eine Punktreihe genannt und durch ( $a$ ) bezeichnet;  $a$  heisst der Träger der Punktreihe. Zwei Punktreihen sind collinear, wenn ihre Träger so gelegt werden können, dass die Verbindungslinien je zweier homologer Punkte durch denselben Punkt gehen. Demnach sind zwei perspectivisch liegende Punktreihen ( $CXBX_1$  und  $CUZU_1$ , Fig. 81) stets collinear. Der Schnittpunkt ihrer Träger ist sich selbst homolog und wird daher homologer Doppelpunkt genannt. Aus 307 folgt nun:

310. In zwei collinearen Punktreihen ist das Doppelverhältniss aus vier beliebigen Punkten der einen Reihe gleich dem Doppelverhältniss aus den vier homologen Punkten der anderen Reihe (und umgekehrt).

**132.\* Collineare Strahlenbüschel.** — Verbindet man zwei Punkte der Ebene,  $P$  und  $P_1$ , mit vier Punkten einer Punktreihe ( $A, B, C, D$ ), so entstehen zwei collineare Strahlenbüschel ( $P$ ) und ( $P_1$ ). Da der Träger der Punktreihe von beiden Büscheln geschnitten wird, so wird auch eine beliebige Gerade von jedem der beiden Büschel unter demselben Doppelverhältniss ( $AB.CD$ ) geschnitten (307). Man hat also den Satz:

311. Zwei collineare Strahlenbüschel schneiden jede Gerade unter gleichen Doppelverhältnissen (und umgekehrt).

In dem vollständigen Viereck  $\overline{ABA_1B_1}$  (Fig. 82) sind die

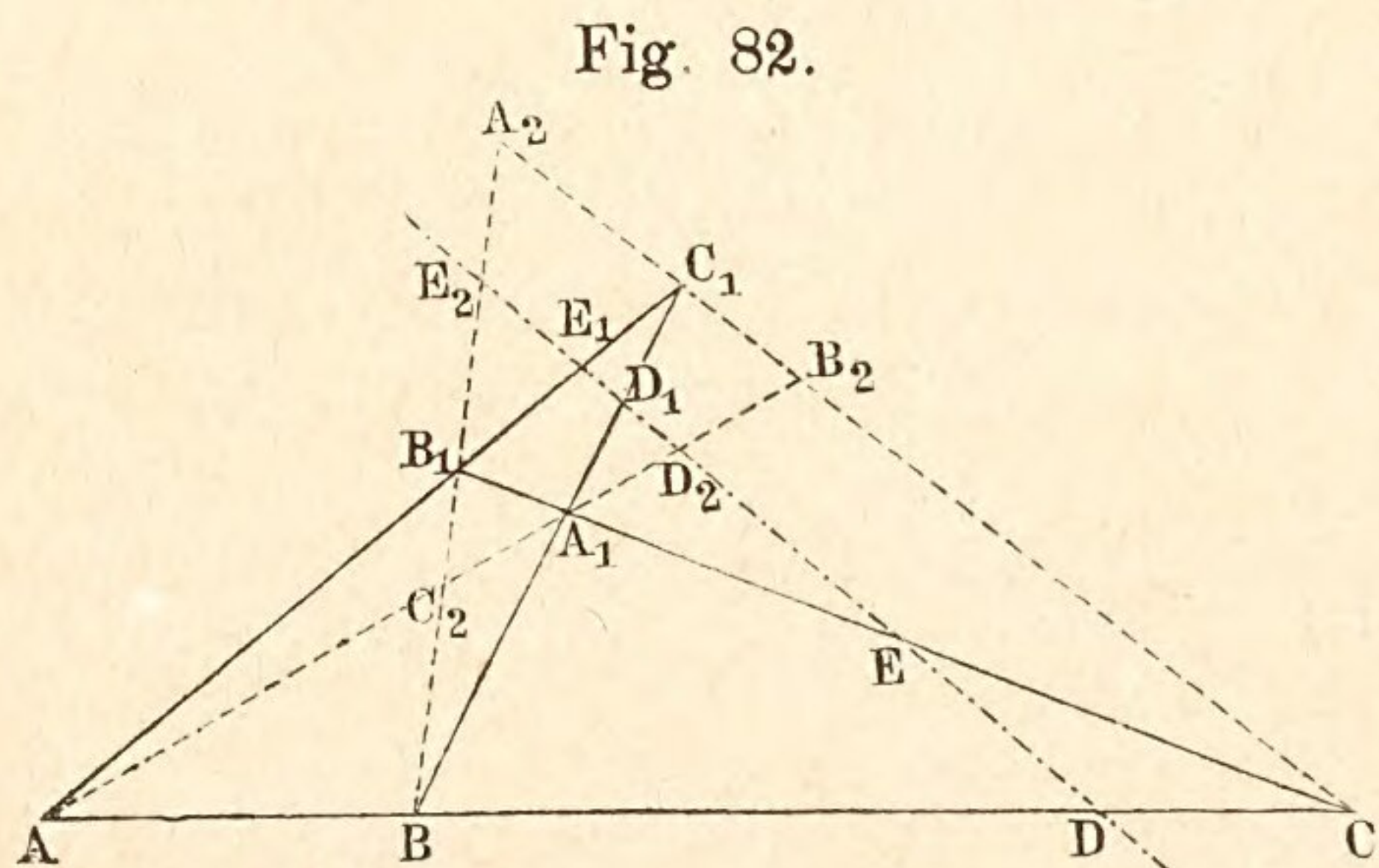


Fig. 82.

Diagonalen  $AA_1, BB_1, CC_1$ . (Letztere, welche die dritten Ecken  $C$  und  $C_1$  verbindet, heisst dritte Diagonale.) Denkt man sich noch  $A$  und  $A_1$  mit  $A_2$  verbunden, so sind die viergliedrigen Strahlenbüschel ( $A$ ) und ( $A_1$ ) perspectivisch; denn es schneiden sich:

$$\text{in } AC, A_1C_1 \mid AB_2, A_1B_2 \mid AC_1, A_1C \mid AA_2, A_1A_2 \\ B \quad C_2 \quad B_1 \quad A_2.$$

Es sind also (nach 311) auf der schneidenden Geraden  $CA_2$  die Doppelverhältnisse der entsprechenden Strecken für beide Strahlenbüschel gleich, d. h.



$$(CB_2 \cdot C_1A_2) = (C_1B_2 \cdot CA_2),$$

oder: 
$$\frac{CB_2}{C_1B_2} \cdot \frac{C_1A_2}{CA_2} = \frac{C_1B_2}{CB_2} \cdot \frac{CA_2}{C_1A_2},$$

oder: 
$$\left( \frac{CB_2}{C_1B_2} \cdot \frac{C_1A_2}{CA_2} \right)^2 = 1; \quad \frac{CB_2}{C_1B_2} \cdot \frac{C_1A_2}{CA_2} = -1,$$

(da das erste Verhältniss negativ, das zweite positiv ist). Die Büschel  $(A)$  und  $(A_1)$  sind hiernach harmonisch (dasselbe lässt sich, wenn man in der letzten Darstellung überall  $A$  und  $B$  vertauscht, auch für  $(B)$  und  $(B_1)$  nachweisen). Nennt man nun die Schnittpunkte  $(A_2, B_2, C_2)$  der Diagonalen die Nebenecken des vollständigen Vierecks, so giebt die letzte Formel (nach 308) den Satz:

Auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierecks 312. sind die Ecken und Nebenecken harmonische Punkte.

Anm. Ist  $B_1B \parallel C_1C$ , so rückt  $A_2$  ins Unendliche, also ist  $B_2$  die Mitte von  $C$  und  $C_1$  (252), und  $AB_2$  Mittellinie des Dreiecks  $ACC_1$ . (Wie lässt sich nun der Satz 312 in Bezug auf dieses Dreieck aussprechen?) Ist auch  $B$  die Mitte von  $AC$ , so erhält man wieder den Satz 275.

Nennt man die Strecken  $AA_2, BB_2, CC_2$ , welche die Ecken des Vierecks mit den Nebenecken verbinden, seine Nebendiagonalen, so erhält man durch die Bemerkung, dass auch die Seitenlinie  $B_1A_1$  durch den Strahlenbüschel  $(A)$  in harmonischen Punkten geschnitten wird, den Satz:

Auf jeder Seite eines vollständigen Vierecks sind 313. die drei Ecken und der Schnittpunkt einer Nebendiagonale harmonische Punkte.

**133.\* Involutorische Punktreihen.** — Wie vier Geraden (die Seiten eines Vierecks) sich in sechs Punkten (den Ecken und dritten Ecken) schneiden, so lassen sich reciprok durch vier Punkte (die Ecken eines Vierecks) sechs Geraden ziehen (die Seiten und Diagonalen).

Statt der Geraden  $A_2C$  schneide eine beliebige Gerade  $E_2D$  die Seiten und Diagonalen des Vierecks  $ABA_1B_1$  in den Punktpaaren:  $DE, D_1E_1, D_2E_2$ . Denkt man sich dann  $A$  und  $A_1$  mit  $E_2$  verbunden, so folgt aus der Perspectivität der Strahlenbüschel  $(A)$  und  $(A_1)$ , geschnitten von  $BB_1$  und  $E_2D$  (311):

für  $(A)$  
$$(BC_2 \cdot B_1E_2) = (DD_2 \cdot E_1E_2);$$

für  $(A_1)$  
$$(BC_2 \cdot B_1E_2) = (D_1D_2 \cdot EE_2);$$

folglich: 1) 
$$(DD_2 \cdot E_1E_2) = (D_1D_2 \cdot EE_2).$$



Drei Punktpaare,  $DE$ ,  $D_1E_1$ ,  $D_2E_2$ , welche der Bedingung genügen:  $(DD_2 \cdot E_1E_2) = (D_1D_2 \cdot EE_2)$ , bilden eine involutorische Punktreihe. Die beiden Punkte eines Paares heissen einander zugeordnet. Man kann daher die letzte Formel durch den Satz ausdrücken:

314. Die Seiten und Diagonalen eines vollständigen Vierecks schneiden jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe, wobei die Schnittpunkte zweier Gegenseiten oder Diagonalen einander zugeordnet sind.

Vertauscht man in der Formel

$$1) \quad (DD_2 \cdot E_1E_2) = (D_1D_2 \cdot EE_2)$$

die Punkte  $D$  mit  $D_2$  und  $E$  mit  $E_2$  (was damit gleichbedeutend ist, dass man das Viereck  $\overline{C_1B_1C_2A_1}$  anstatt  $\overline{ABA_1B_1}$  betrachtet), so erhält man:

$$2) \quad (D_2D \cdot E_1E) = (D_1D \cdot E_2E).$$

Vertauscht man hierin endlich  $D$  mit  $D_1$  und  $E$  mit  $E_1$  (Viereck  $\overline{CA_1C_2B}$ ), so erhält man:

$$3) \quad (D_2D_1 \cdot EE_1) = (DD_1 \cdot E_2E_1).$$

Vertauscht man in 2) die rechte und linke Seite und multiplicirt dann die drei Formeln 1), 2), 3), so bleibt:

$$4) \quad (E_1D_2 \cdot ED_1 \cdot E_2D) = +1,$$

315. d. h.: In einer involutorischen Punktreihe ist das Tripelverhältniss zwischen den Abständen dreier nicht zugeordneter Punkte von den drei ihnen zugeordneten gleich 1.

Schreibt man die Formel 1) als ein gleich 1 gesetztes Quadrupelverhältniss, und vertauscht die Buchstaben  $A$  und  $B$  mit einander, so bleibt die Formel ungeändert. Man hat also den Satz:

316. Die Beziehung der Involution zwischen drei Punktpaaren bleibt unverändert, wenn man die Punkte eines Paares mit einander vertauscht.

Vertauscht man in 4) das Paar  $D, E$  mit  $D_2, E_2$ , so bleibt die Formel ungeändert. Man hat also den Satz:

317. Die Beziehung der Involution zwischen drei Punktpaaren bleibt unverändert, wenn man zwei Paare mit einander vertauscht.

Anm. Die Formeln 1) und 4) dienen in gleicher Weise zur Bestimmung der Involution. Durch Vertauschung je zweier Punktpaare in



1) und der beiden Punkte je eines Paares in 4) lassen sich jedesmal noch neue Formeln ableiten, welche äusserlich von den gegebenen verschieden sind, aber dieselben ersetzen können.

Ist die schneidende Gerade einer Seite oder Diagonale des Vierecks parallel (also z. B.  $E_2D \parallel E_2B$ ), so rückt einer der 6 Punkte ( $E_2$ ) in unendliche Entfernung. Und da nun  $E_2D = E_2D_1$  ist, so geht Formel 4) über in

$$E_1D_2 \cdot ED_1 = ED_2 \cdot E_1D,$$

oder, wenn man  $E_1D$  durch  $E_1D_2 + D_2D$ , und  $ED_1$  durch  $ED_2 + D_2D_1$  ersetzt:

$$E_1D_2(ED_2 + D_2D_1) = ED_2(E_1D_2 + D_2D),$$

oder:

$$E_1D_2 \cdot D_2D_1 = ED_2 \cdot D_2D.$$

Derjenige Punkt  $D_2$  einer involutorischen Reihe, welcher dem unendlich fernen Punkte zugeordnet ist, heisst Mittelpunkt der Involution. Die letzte Formel drückt folgende Eigenschaft desselben aus:

Das Product der Abstände zweier zugeordneter Punkte vom Mittelpunkte der Involution hat für alle Punktepaaire denselben Werth (und umgekehrt).

Geht die schneidende Gerade durch den Schnittpunkt zweier Gegenseiten oder der beiden Diagonalen ( $C, C_1, C_2$ ), so fallen in diesem Punkte zwei zugeordnete Punkte zusammen (z. B.  $E$  und  $D$  in  $C$ ). Ein sich selbst zugeordneter Punkt der involutorischen Reihe heisst Doppelpunkt der Involution. — Geht die schneidende Gerade durch zwei dieser Punkte ( $C$  und  $C_1$ ), so erhält man zwei Doppelpunkte der Involution.\*) Dieselben sind nach 312 mit dem Paare  $A_2B_2$  harmonisch.

Dieses Resultat ergibt sich auch, wenn man in der Formel 4)

$$\frac{E_1D_2}{ED_2} \cdot \frac{ED_1}{E_2D_1} \cdot \frac{E_2D}{E_1D} = 1,$$

$D$  und  $E$  durch  $S$ ,  $D_1$  und  $E_1$  durch  $S_1$  ersetzt. Man erhält dann:

$$\frac{S_1D_2}{SD_2} \cdot \frac{SS_1}{E_2S_1} \cdot \frac{E_2S}{S_1S} = 1, \text{ oder } \frac{S_1D_2}{SD_2} \cdot \frac{SE_2}{S_1E_2} = -1,$$

wodurch die Punktepaaire  $S, S_1$  und  $D_2E_2$  als harmonisch bezeichnet sind.

\*) Aus Fig. 82 ist ersichtlich, dass, wenn die Gerade  $D_2E_2$  in die Lage  $B_2A_2$  übergeht,  $E$  und  $D$  in  $C$ ,  $E_1$  und  $D_1$  in  $C_1$  zusammenfallen.



Da die Beziehung der Involution unverändert bleibt, wenn man zwei Punktpaare mit einander vertauscht (317), so kann man auch  $D_1$  und  $E_1$  durch  $S$ ,  $D_2$  und  $E_2$  durch  $S_2$  ersetzen, und findet dann, dass auch das Paar  $\bar{D}$ ,  $E$  mit  $S_1$ ,  $S_2$  harmonisch ist. Man hat also den Satz:

319. Die Doppelpunkte einer Involution sind harmonisch zu allen Punktpaaren derselben.

320. Und umgekehrt: Alle Punktpaare, welche mit einem gegebenen Paare harmonisch sind, bilden eine Involution.

Anm. In diesem Satze liegt die eigentlich geometrische Definition involutorischer Punktpaare. Betrachtet man zwei Punkte, welche zu zwei gegebenen Paaren gleichzeitig harmonisch sein sollen, als Unbekannte, so sind dieselben durch die beiden Gleichungen, welche diese Beziehungen ausdrücken, vollständig bestimmt. Also: Zu zwei gegebenen Punktpaaren giebt es immer ein gemeinsames harmonisches. Sind drei Punktpaare gegeben, zu denen das gesuchte harmonisch sein soll, so kann man sich aus den drei Gleichungen, welche diese Beziehungen ausdrücken, die beiden Unbekannten eliminirt denken. Das Resultat der Elimination ist die Bedingungsgleichung, welche die drei Punktpaare erfüllen müssen, um ein gemeinsames harmonisches Paar zu haben (vgl. Th. I, Nr. 96). Diese Bedingungsgleichung drückt die Beziehung der Involution aus. (Ausgeführt finden sich diese Rechnungen im „System der Raumlehre“, Th. I, Nr. 170 und 171). Also: Zu drei oder mehr gegebenen Punktpaaren giebt es nur dann ein gemeinsames harmonisches, wenn sie involutorisch sind.

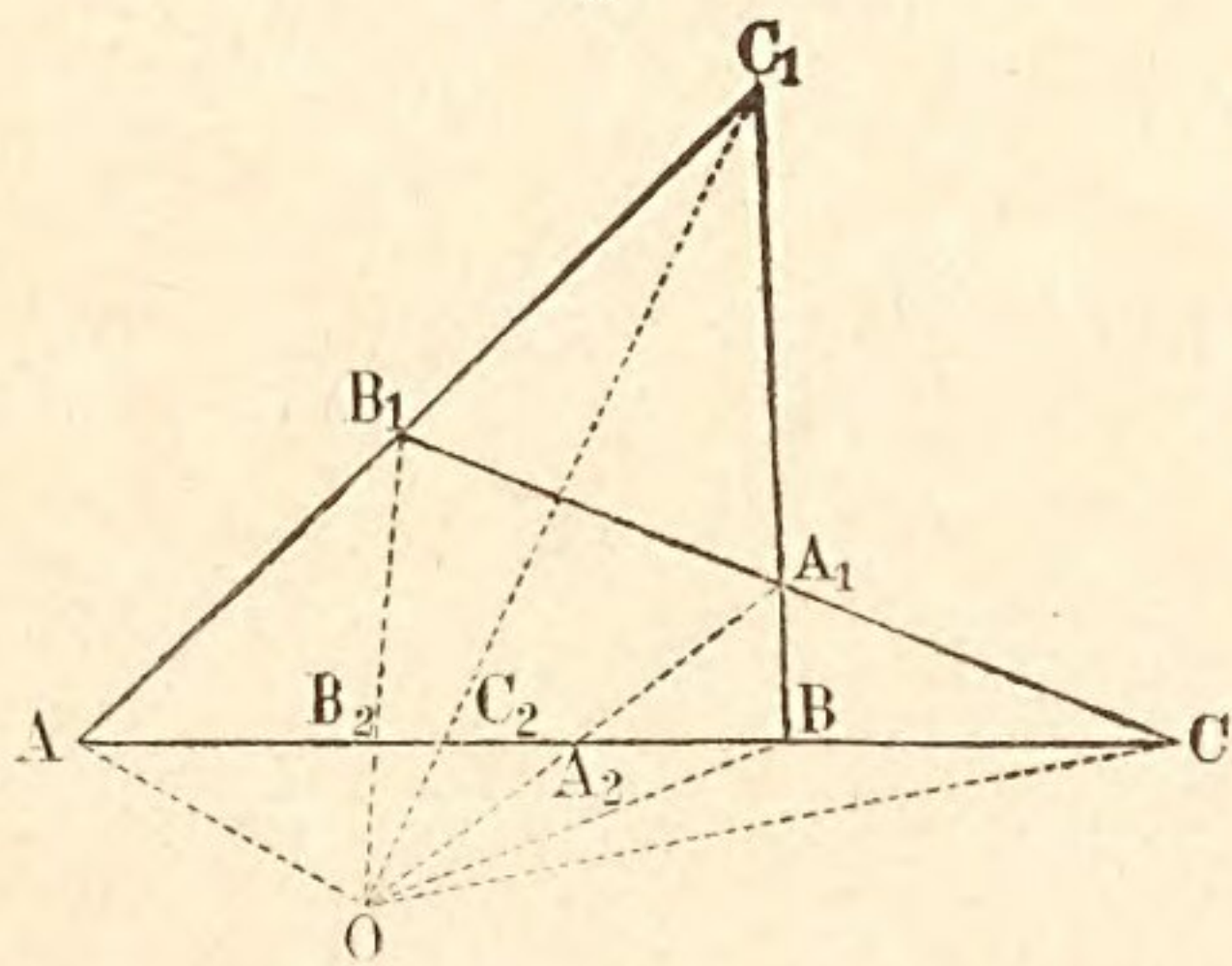
**134.\* Involutorische Strahlenbüschel.** — Ein beliebiger Punkt  $O$  sei mit den Ecken eines vollständigen Vierecks ( $\overline{ABCA_1B_1C_1}$ ) verbunden. Dann sind die durch die Punktreihe ( $B_1C_3A_1C$ ) gehenden Strahlenbüschel ( $O$ ) und ( $C_1$ ) perspectivisch. Es sind also auf der schneidenden Geraden  $AC$  die Doppelverhältnisse der entsprechenden Strecken für beide Strahlenbüschel gleich, d. h.:

$$(AC_2 . BC) = (B_2C_2 . A_2C).$$

Demnach sind die Punktpaare  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  involutorisch. Ein Strahlenbüschel ( $O$ ) heisst involutorisch, wenn er eine Gerade ( $AC$ ) in einer involutorischen Punktreihe schneidet. Die beiden durch zugeordnete Punkte gehenden Strahlen heissen ebenfalls zugeordnet. Man hat hiernach den zu 314 reciproken Satz:

321. Die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes

Fig. 83.





mit den Ecken und dritten Ecken eines vollständigen Vierecks bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, wobei die nach zwei gegenüberliegenden Ecken oder dritten Ecken gerichteten Strahlen einander zugeordnet sind.

Der Satz 307 gestattet nun die unmittelbar klare Erweiterung:

Ein involutorischer Strahlenbüschel schneidet 322. jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe.

Dann folgt aus 311:

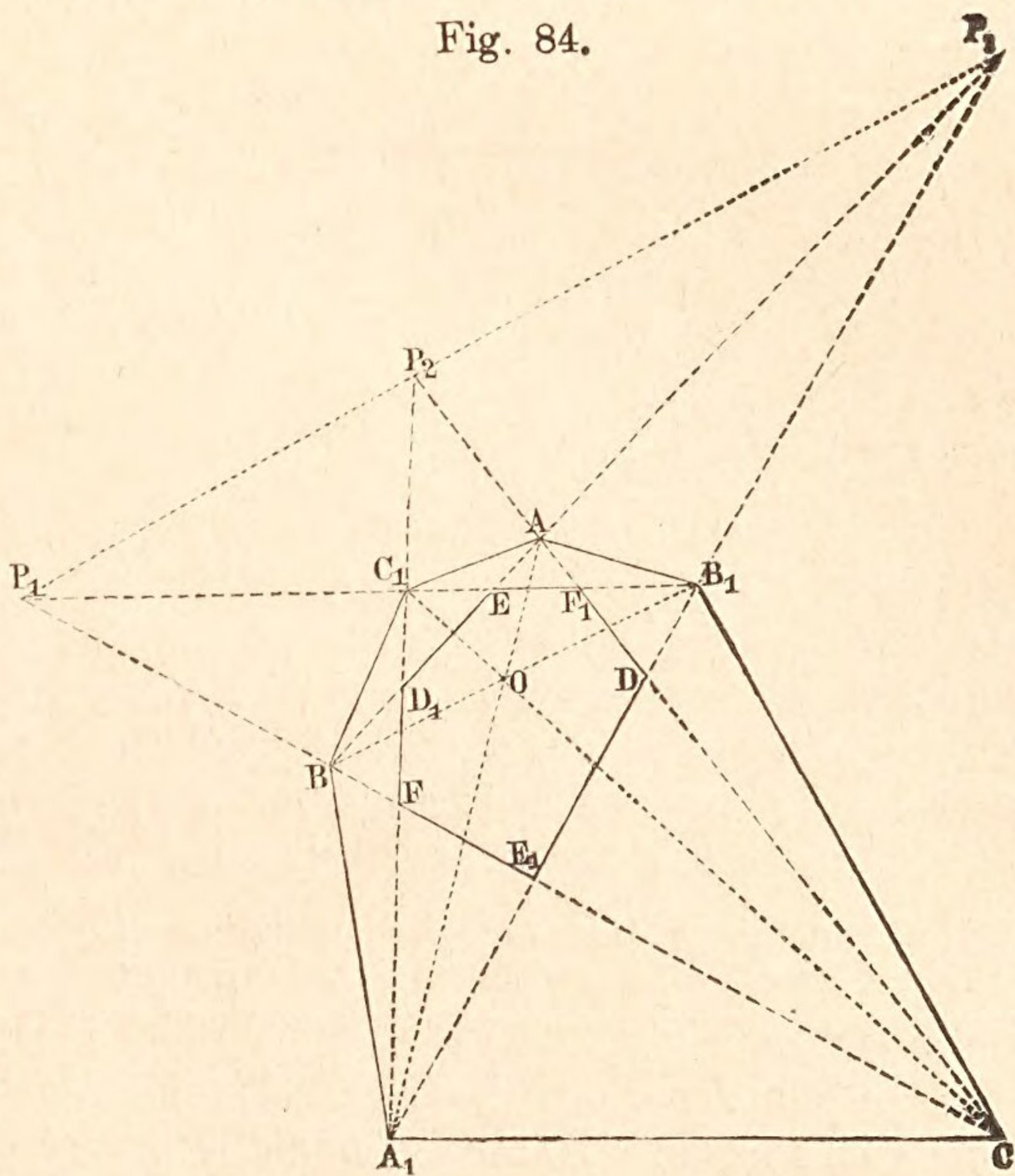
Eine involutorische Punktreihe giebt, mit jedem 323. beliebigen Punkte verbunden, einen involutorischen Strahlenbüschel.

## 2) Das Brianchon'sche Sechseck und das Pascal'sche Sechseck.

**135.\* Vorbemerkung.** — Zwei Punktpaare bildeten die Ecken eines Vierecks, dessen Diagonalen die Träger dieser Punktpaare waren. — Drei Punktpaare ( $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ) bilden die Ecken eines Sechsecks, dessen Diagonalen die Träger dieser Punktpaare sind. Das Sechseck heisst ein Brianchon'sches, wenn die drei Träger (die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Ecken) durch denselben Punkt  $O$  (Brianchon'scher Punkt) gehen.

**136.\*** Je drei nicht benachbarte Ecken eines Sechsecks bilden ein Dreieck ( $\overline{ABC}$  und  $\overline{A_1B_1C_1}$ ). Die Verbindungslinien je

Fig. 84.





zweier homologer Ecken dieser Dreiecke gehen durch denselben Punkt ( $O$ ); folglich befinden sich die beiden Dreiecke in perspectivischer Lage. Nun ist nach 300

$$\text{für } \overline{ABO}, \text{ geschnitten von } A_1B_1P_3 \\ (AP_3 \cdot BB_1 \cdot OA_1) = -1,$$

$$\text{für } \overline{BCO}, \text{ geschnitten von } B_1C_1P_1 \\ (BP_1 \cdot CC_1 \cdot OB_1) = -1,$$

$$\text{für } \overline{CAO}, \text{ geschnitten von } C_1A_1P_2 \\ (CP_2 \cdot AA_1 \cdot OC_1) = -1.$$

Das Product dieser drei Formeln ist

$$(AP_3 \cdot BP_1 \cdot CP_2) = -1;$$

folglich liegen (nach 301) die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  auf derselben Geraden, und man hat den Satz:

324. Gehen die Verbindungslinien je zweier homologer Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt, so liegen die Schnittpunkte je zweier homologer Seiten auf einer Geraden (und umgekehrt). — Kurz: Perspectivisch liegende Dreiecke sind collinear.

Anm. Specieller Fall dieses Satzes, wenn  $A_1$  auf  $BC$ ,  $B_1$  auf  $CA$ ,  $C_1$  auf  $AB$  liegt.

Die Seiten der Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{A_1B_1C_1}$  bilden zusammen ein Sechseck ( $\overline{DE_1FD_1EF_1}$ ), welches nach 324 die Eigenschaft hat, dass die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten auf derselben Geraden ( $P_1P_2P_3$ ) liegen. Ein solches Sechseck heisst Pascal'sches, und die Gerade ( $P_1P_2P_3$ ) Pascal'sche Linie. Der Satz 324 kann demnach auch so ausgesprochen werden:

- |                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 325. Die Linien, welche die geraden, und diejenigen, welche die ungeraden Ecken eines Brianchon'schen Sechsecks verbinden, bilden ein Pascal'sches Sechseck. | Die Punkte, in welchen die geraden, und diejenigen, in welchen die ungeraden Seiten eines Pascal'schen Sechsecks sich schneiden, bilden ein Brianchon'sches Sechseck. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Anm. Definition und Eigenschaften des Brianchon'schen Sechsecks und des Pascal'schen Sechsecks sind einander reciprok. Es folgt daher aus jedem Satze der einen Figur ein reciproker für die andere.

Es sei  $\overline{DE_1FD_1EF_1}$  (Fig. 84) ein dem Kreise einbeschriebenes Sechseck. Dann ist nach 300



für  $\overline{ABC}$ , geschnitten von  $B_1C_1P_1$ :  $(AE \cdot BP_1 \cdot CF_1) = -1$ ;  
 » » » »  $C_1A_1P_2$ :  $(BF \cdot CP_2 \cdot AD_1) = -1$ ;  
 » » » »  $A_1B_1P_3$ :  $(CD \cdot AP_3 \cdot BE_1) = -1$ .

Multiplicirt man diese drei Formeln und beachtet, dass nach 256  $AE \cdot AD_1 = AF_1 \cdot AD$ ;  $BF \cdot BE_1 = BD_1 \cdot BE$ ;  $CD \cdot CF_1 = CE_1 \cdot CF$ , so erhält man:

$$(BP_1 \cdot CP_2 \cdot AP_3) = -1;$$

d. h.: Die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  liegen auf derselben Geraden (301).  
 Man hat also den Satz:

Jedes einem Kreise einbeschriebene Sechseck 326. ist ein Pascal'sches.

Da ferner Punkt und Tangente in Bezug auf die Kreislinie reciproke Gebilde sind, so folgt aus 273 der reciproke Satz:

Jedes einem Kreise umbeschriebene Sechseck 327. ist ein Brianchon'sches.

### 3) Die Kreislinie. — Pol und Polare.

**137.\* Eine Kreislinie.** — Von einem Punkte  $P$  seien zwei Tangenten,  $PT$  und  $PT_1$  an den Kreis  $O$  gezogen. Der durch  $P$  gezogene Durchmesser schneide die Kreislinie in den Punkten  $A$  und  $B$ , und die Strecke  $TT_1$  in  $Q$ . Dann ist  $\overline{ATQ} \sim \overline{ABT}$  (245), folglich:

$$1) ATQ = ABT.$$

Ferner ist  $PTO = ATB = R$ , folglich, wenn man den gemeinsamen Winkel  $ATO$  subtrahirt:

$$2) PTA = OTQ.$$

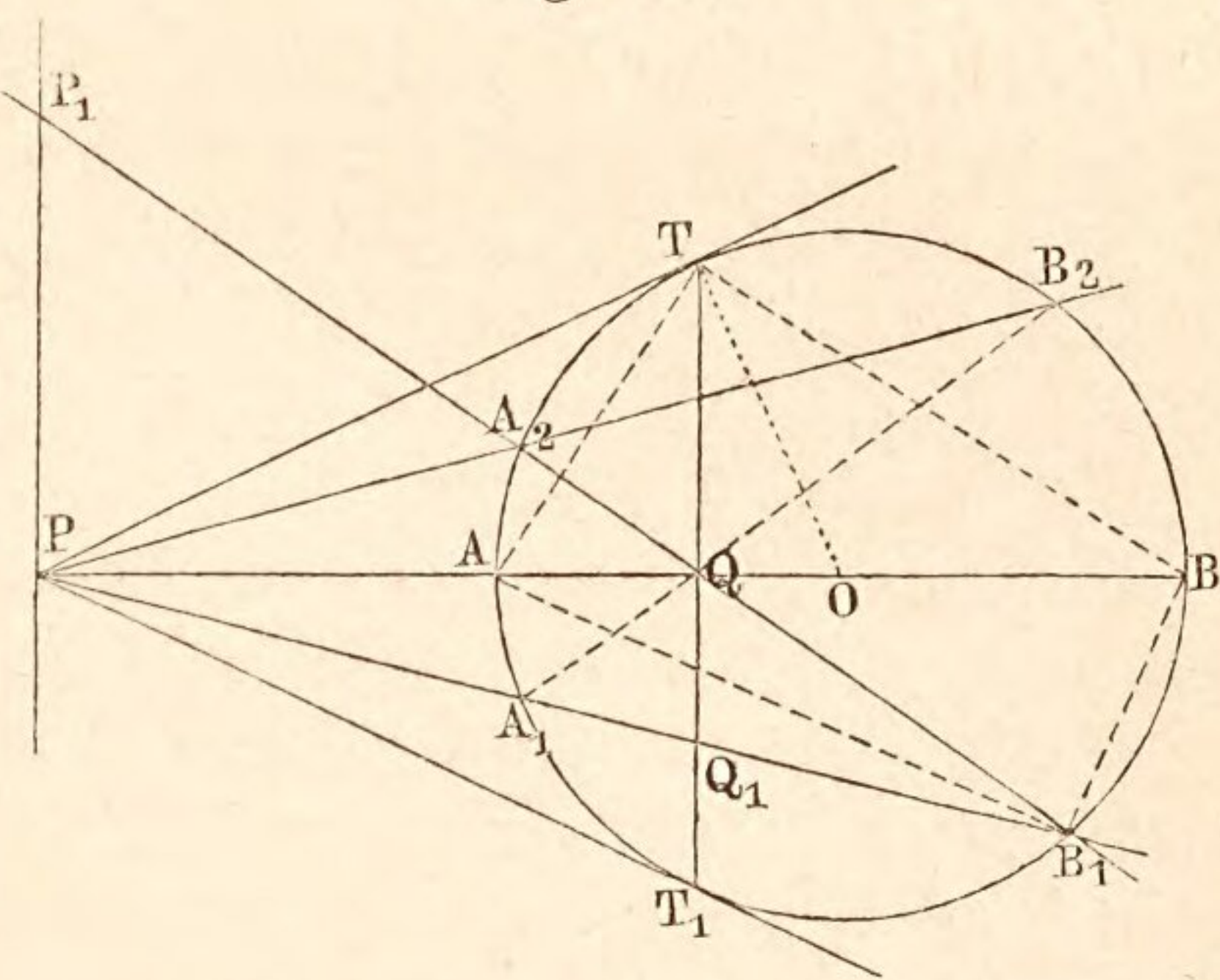
Da nun  $ABT = OTB$  ist (98), so folgt aus 1) und 2)

$$3) ATQ = PTA;$$

d. h.: Die Strecke  $TA$  halbirt den Winkel  $PTQ$ , und die auf  $TA$  senkrechte Strecke  $TB$  den Nebenwinkel desselben. Demnach sind die Punktepaaire  $PQ$  und  $AB$  harmonisch (253 u. 254), und man hat den Satz:

Geht eine Gerade durch den Kreismittelpunkt, 328. so sind ihre Schnittpunkte mit der Kreislinie harmonisch zu jedem ausserhalb des Kreises liegenden Punkte  $P$  der Geraden, und dem Punkte  $Q$ , in dem

Fig. 85.





die Gerade von der Verbindungsstrecke der Berührungspunkte der aus  $P$  gezogenen Tangenten geschnitten wird.

Ist  $PB_1$  eine beliebige durch  $P$  gezogene Secante, so ist der Strahlenbüschel  $B_1(PAQB)$  harmonisch (308), und da  $B_1B \perp B_1A$ , so ist  $PB_1A = QB_1A$  (Umk. z. 309); folglich sind die Bogen  $AA_1$  und  $AA_2$ , auf welchen diese Winkel als Peripheriewinkel stehen, einander gleich (Umk. z. 166), und ebenso die Bogen  $BB_1$  und  $BB_2$ . Hieraus folgt weiter die Gleichheit der Sehnen  $A_2B_1$  und  $A_1B_2$  (162), sowie der Sehnen  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  (162). Man hat hiernach den Satz:

329. Zieht man durch einen Punkt ( $P$  oder  $Q$ ) Sehnenpaare von gleicher Länge ( $A_1B_1 = A_2B_2$  oder  $A_1B_2 = A_2B_1$ ) und verbindet wechselseitig die Endpunkte jedes Paares, so gehen diese Verbindungslinien bei allen Sehnenpaaren durch denselben Punkt ( $Q$  oder  $P$ ).

Anm. Die Verbindungsstrecken  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  sind stets parallel  $TT_1$ , mithin gilt der Satz auch von ihnen.

Aus der Gleichheit der Bogen  $AA_1$  und  $AA_2$  folgt weiter, dass  $A_1QA = A_2QA$  ist. Demnach halbirt die Strecke  $QA$  den Nebenwinkel von  $A_1QB_1$ , mithin die auf  $QA$  senkrechte  $QQ_1$  den Winkel  $A_1QB_1$  selbst. Also ist der Strahlenbüschel  $Q(PA_1Q_1B_1)$  harmonisch, und man hat den Satz:

330. Zieht man aus einem Punkte  $P$  ausserhalb des Kreises beliebige Secanten, so ist der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes die Verbindungslinie der Berührungspunkte der aus  $P$  gezogenen Tangenten.

Diejenige Gerade ( $TT_1$ ), welche auf jeder durch einen Punkt  $P$  gezogenen Secante den  $P$  zugeordneten harmonischen Punkt trifft, heisst die Polare des Punktes  $P$ . Der Punkt  $P$  heisst der Pol der Geraden  $TT_1$ , und  $Q$  der dem Punkte  $P$  zugeordnete Pol. Unmittelbar ergeben sich nun die Sätze:

331. Die Polare eines ausserhalb des Kreises liegenden Punktes ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der aus dem Punkte an die Kreislinie gezogenen Tangenten.

332. Der Pol einer Secante ist der Schnittpunkt der in ihren Schnittpunkten gezogenen Tangenten. (Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich ferne Punkt der auf dem Durchmesser senkrecht stehenden Geraden.)



Die Polare eines auf der Kreislinie liegenden 333.  
Punktes ist die Tangente in diesem Punkte.

Der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt. 334.  
(Derselbe ist als Pol sich selbst zugeordnet.)

Ist  $QA_2$  eine beliebige durch  $Q$  gezogene Secante, deren Verlängerung die in  $P$  auf  $PQ$  errichtete Senkrechte in  $P_1$  schneidet, so halbiert  $PQ$  den Winkel  $A_1PA_2$ , folglich die auf  $PQ$  senkrechte  $PP_1$  den Nebenwinkel desselben. Demnach ist auch  $P(P_1A_2QB_1)$  ein harmonischer Strahlenbüschel,  $P_1$  der zugeordnete Pol von  $Q$ , und  $PP_1$  (nach der Definition) die Polare von  $Q$ . Man hat also den Satz:

Die Polare eines beliebigen Punktes ist die auf 335.  
dem Durchmesser in dem zugeordneten Pol errichtete Senkrechte.

Da für alle Punkte der Geraden  $PP_1$  der zugeordnete Pol  $Q$  ist, und die Polare eines Punktes (nach der Definition) stets durch den zugeordneten Pol geht, so folgt weiter:

Die Polaren aller Punkte einer Geraden schnei- 336.  
den sich im Pole der Geraden.

Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Ge- 337.  
raden liegen auf der Polare des Punktes.

Anm. In diesen beiden Sätzen ist das zwischen Pol und Polare bestehende Verhältniss der Reciprocität ausgesprochen. (Wie lässt sich mittelst dieser Sätze 327 beweisen?) — Construction der Polare zu einem innerhalb des Kreises liegenden Punkte mittelst zweier durch ihn gezogenen Secanten, deren Pole verbunden werden. — Construction des Pols zu einer die Kreislinie nicht schneidenden Geraden mittelst zweier auf ihr angenommenen Punkte, deren Polaren sich schneiden. — Die Sätze 336 und 337 können auch so ausgesprochen werden: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden vorwärts, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden. — Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare des Punktes vorwärts.

Aus dem Zusatz zu 332 folgt nun:

Die Polare des Mittelpunktes eines Kreises ist 338.  
die unendlich ferne Gerade.

**138.\* Mehrere Kreislinien.** — Die Polaren eines Punktes  $P$  in Bezug auf zwei Kreislinien schneiden sich in einem Punkte  $Q$ , welcher der zugeordnete harmonische Pol zu  $P$  heisst. Seien  $S$  und  $S_1$  die Schnittpunkte der beiden Kreislinien. Wenn dann eine beliebige Gerade ( $PQ$ ) die eine Kreislinie in  $A$  und  $A_1$ , die andre in  $B$  und  $B_1$ , die gemeinsame Secante in  $M$  schneidet, so ist nach 257

$$MS \cdot MS_1 = MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1.$$



Wenn die beliebige Gerade eine dritte, durch  $S$  und  $S_1$  gehende Kreislinie in  $C$  und  $C_1$  schneidet, so ist ebenso

$$MS \cdot MS_1 = MC \cdot MC_1;$$

also:

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1;$$

d. h. die Punktpaare  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  bilden eine Involution, deren Mittelpunkt  $M$  ist (318). Man hat also den Satz:

339. Alle Kreislinien, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, werden von einer beliebigen Geraden in involutorischen Punktpaaren geschnitten, und der Schnittpunkt mit der gemeinsamen Secante ist der Mittelpunkt der Involution.

Da nun die Paare  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  ein gemeinsames harmonisches Paar haben, und  $PQ$  das gemeinsame harmonische Paar zu  $AA_1$  und  $BB_1$  ist, so ist  $PQ$  auch zu  $CC_1$  harmonisch; d. h.: durch den Punkt  $Q$  geht auch die Polare von  $P$  in Bezug auf die dritte Kreislinie. Man hat also den Satz:

340. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Kreislinien, die sich in denselben zwei Punkten schneiden, gehen durch einen Punkt.

Betrachtet man auch die gemeinsame Secante als Kreislinie des Systems aller durch zwei Punkte gehenden Kreislinien, so rückt für sie der zweite Schnittpunkt der beliebigen Geraden  $PQ$  in unendliche Entfernung; mithin liegt der ihm zugeordnete erste Schnittpunkt in der Mitte von  $PQ$  (252), und man hat den Satz:

341. Die Verbindungsstrecke zweier zugeordneter harmonischer Pole wird durch die gemeinsame Secante des Systems halbirt.

**139.\* Aehnlichkeitspolaren.** — Durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt  $S_3$  zweier Kreise  $O_1$  und  $O_2$  sei eine Secante gezogen, welche  $O_1$  in  $A_1$  und  $B_1$ ,  $O_2$  in  $A_2$  und  $B_2$  schneidet. Da  $S_3$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  in gerader Linie liegen, so schneiden sich (336 und 333) die Polare von  $S_3$  in Bezug auf  $O_1$ , sowie die Tangenten in  $A_1$  und  $B_1$  in einem Punkte  $P_1$ , welcher der Pol der Secante in Bezug auf  $O_1$  ist. — Ebenso schneiden sich die Polare von  $S_3$  in Bezug auf  $O_2$ , und die Tangenten in  $A_2$  und  $B_2$  im Pole ( $P_2$ ) der Secante in Bezug auf  $O_2$ . Man nennt die Polaren des äusseren Aehnlichkeitspunktes zweier Kreise seine äusseren Aehnlichkeitspolaren.

Es seien nun die Punkte  $B_1$  und  $A_2$  die Berührungspunkte einer dritten Kreislinie  $O$ . Nennt man dann die aus dem Aehn-



lichkeitspunkte zweier Kreislinien ( $O_1$  und  $O_2$ ) durch die Berührungspunkte einer dritten ( $O$ ) gehende Secante die Berührungssecante von  $O$ , so kann das letzte Resultat in dem Satze ausgesprochen werden:

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, 342. so geht jede ihrer äusseren Aehnlichkeitspolaren durch den Pol der Berührungssecante im zugehörigen Kreise.

Die in  $B_1$  und  $A_2$  an  $O$  gezogenen Tangenten schneiden sich in  $P$  und sind einander gleich (186). Da dieselben gleichzeitig Tangenten an  $O_1$  und  $O_2$  sind, so ist hiernach  $P$  ein Punkt der Potenzlinie von  $O_1$  und  $O_2$  (260), und die durch  $P$  auf  $O_1O_2$  gefällte Senkrechte ist diese Potenzlinie selbst.

Nun sind in Bezug auf  $O$  und  $O_2$  homolog:  $B_1$  und  $B_2$ ,  $B_2P_2$  und  $B_1P$  (als Parallelen),  $P$  und  $P_2$  (als Schnittpunkte dieser Parallelen mit der homologen Doppellinie  $PP_2$ ), endlich  $PL$  und  $P_2L_2$  (als Parallelen). Ebenso lässt sich zeigen, dass in Bezug auf  $O$  und  $O_1$  die Geraden  $PL$  und  $P_1L_1$  homolog sind. Man hat also den Satz:

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, 343. so ist ihre gemeinsame Secante mit jeder ihrer äusseren Aehnlichkeitspolaren homolog in Bezug auf den zugehörigen und den Berührungskreis.

Wenn  $O$  ausser von  $O_1$  und  $O_2$  noch von einem dritten Kreise  $O_3$  berührt wird, so seien die äusseren Aehnlichkeitspunkte

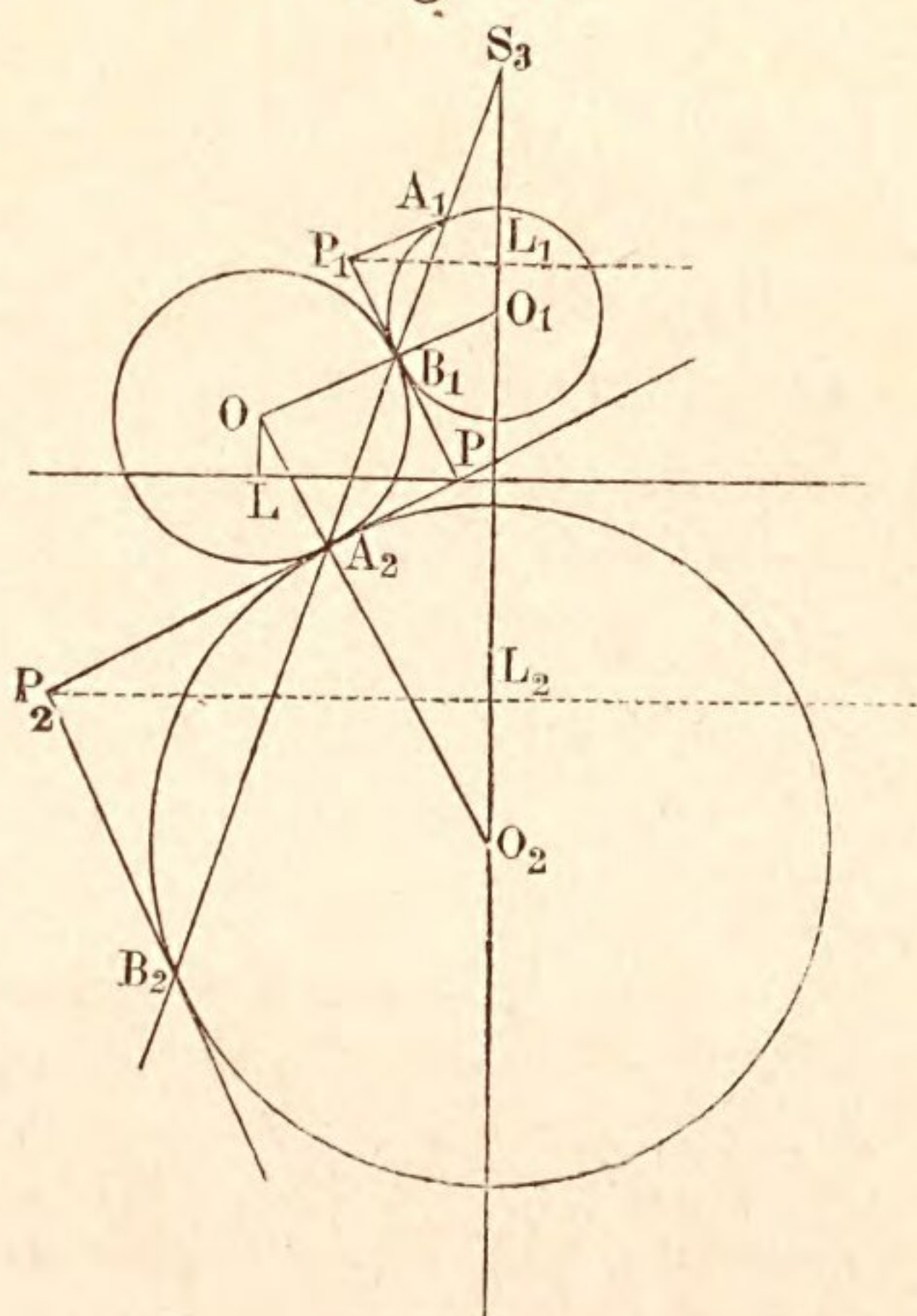
für  $O_1$  und  $O_2$ ,  $O_2$  und  $O_3$ ,  $O_3$  und  $O_1$ .

Dann sind nach dem letzten Satze homologe Linien in Bezug auf  $O$  und  $O_2$ :

- 1) die Polare von  $S_3$  zu  $O_2$  und die Potenzlinie von  $O_1$  und  $O_2$ ,
- 2) » » »  $S_1$  »  $O_2$  » » »  $O_3$  »  $O_2$ .

Folglich sind der Schnittpunkt der Polaren von  $S_3$  und  $S_1$  zu  $O_2$  (d. h. der Pol der Geraden  $S_3S_1$  zu  $O_2$ ) und der Schnitt-

Fig. 86.





punkt der Potenzlinien von  $O_1, O_2$  und  $O_3, O_2$  (d. h. der Potenzpunkt der drei Kreise  $O_1, O_2, O_3$ ) homologe Punkte in Bezug auf  $O$  und  $O_2$ . — Da nun die Verbindungslinie dieser homologen Punkte (nach 280) durch den inneren Aehnlichkeitspunkt (den Berührungspunkt) von  $O_2$  und  $O$  geht, so hat man den Satz:

344. Werden drei Kreise von einem vierten berührt, so liegt ihr Potenzpunkt in gerader Linie mit jedem Berührungspunkte und dem Pol ihrer äusseren Aehnlichkeitsaxe in dem zugehörigen Kreise.

Da die drei in diesem Satze erwähnten Punkte in gerader Linie liegen, so gehen (nach 336) ihre Polaren in Bezug auf irgend einen der drei berührten Kreise (z. B.  $O_1$ ) durch denselben Punkt. Und da die Polare des Berührungspunktes von  $O$  und  $O_1$  die gemeinsame Tangente dieser Kreise ist, so lautet der zu 344 reciproke Satz:

345. Werden drei Kreise von einem vierten berührt, so geht ihre äussere Aehnlichkeitsaxe durch denselben Punkt mit jeder ihrer Berührungstangenten und der Polare ihres Potenzpunktes in dem zugehörigen Kreise.

Anm. Soll ein Kreis construirt werden, der drei gegebene Kreise berührt, so findet man mittelst des Satzes 344 auf jedem der gegebenen Kreise den Berührungspunkt, kann also den gesuchten Kreis durch drei seiner Punkte finden. Dagegen bestimmt der Satz 345 zu jedem der drei gegebenen Kreise die Berührungstangente, lehrt also den gesuchten Kreis durch drei seiner Tangenten finden. — Modificirung dieser Aufgabe (Apollonisches\*) Problem) einerseits durch Hinzufügung der „Berührung von innen“, andererseits durch Ausartung eines oder mehrerer der gegebenen Kreise in einen Punkt oder eine Gerade.

#### 4) Die Projection als specieller Fall der Collineation.

140.\* Die Collineation zweier Gebilde heisst Projection, wenn die Gebilde in verschiedenen Gebieten liegen. Ist eins dieser Gebiete eine Stufe höher als das andere, so sagt man, das im ersten liegende Gebilde sei auf das zweite Gebiet projicirt. Das im zweiten Gebiet liegende Gebilde heisst dann die Projection des andern. — Sind beide Gebiete von gleicher Stufe, so ist es gleich, welches Gebilde man als ursprüngliches, und welches man als Projection betrachtet.

Anm. Man kann also Gebilde der Ebene auf eine (in der Ebene liegende) Gerade projiciren, ebenso Punkte einer Geraden auf eine andere Gerade.

---

\*) Apollonius aus Perga, geb. 247 v. Chr., lehrte in Alexandrien und Pergamus.



Man projecirt ein Gebilde auf ein Gebiet, indem man aus einem gegebenen Punkte (Projectionspunkt, Augenspunkt) durch alle Punkte (Eckpunkte) des gegebenen Gebildes Geraden (Projectionsstrahlen) zieht. Dann bilden die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Gebiete (Projectionslinie, Projectionsebene) die Projection des gegebenen Gebildes. (Schiefe Projection.)

Anm. Wird nach diesem Verfahren der dem Auge sichtbare Theil der Oberfläche eines Körpers auf eine Ebene projecirt, so heisst die Projection das Bild des Körpers.

Lässt man den Projectionspunkt in unendliche Entfernung rücken, so sind die Projectionsstrahlen parallel. (Parallele Projection.)

Anm. Die parallele Projection ist also ein specieller Fall der Affinität.

Insbesondere können die Projectionsstrahlen auf der Projectionslinie oder Projectionsebene senkrecht stehen. (Senkrechte Projection oder Projection im engeren Sinne.)

Aus dem Begriffe der Projection folgen nun für die Geometrie folgende, die senkrechte Projection betreffenden Sätze:

Die Projection eines Punktes (auf eine Gerade) ist 346. der Fusspunkt der von dem Punkte auf die Gerade gefällten Senkrechten.

Die Projection einer Strecke ist die Strecke 347. zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte.

Anm. Wann fällt ein Punkt mit seiner Projection zusammen, wann eine Strecke mit der ihrigen? Wann ist die Projection einer Strecke der gegebenen Strecke gleich? Warum ist sie im Allgemeinen kleiner, und niemals grösser? Wann ist sie gleich Null?

Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist 348. die Projection der Hypotenuse auf die Kathetenlinie.

Die Projectionen paralleler Strecken verhalten 349. sich (auch dem Vorzeichen nach) wie diese.

Projecirt man ein Stück des ersten Schenkels eines 350. Winkels auf den zweiten, so ist die Projection mit dem zweiten Schenkel gleichgerichtet, wenn der Winkel spitz, entgegengesetzt gerichtet, wenn er stumpf ist.



# Rechnende Geometrie.

**141. Vorbemerkung.** — In Nr. 20 ist gezeigt worden, dass jede Strecke durch eine Zahl dargestellt werden kann, indem sie durch eine bestimmte Strecke gemessen wird, deren Länge man gleich 1 setzt. Ist man nun im Stande, für jede Rechnung mit Strecken eine geometrische Bedeutung anzugeben, so kann man Sätze und Aufgaben, welche sich auf die Grösse von Strecken beziehen, durch Formeln, bezw. Gleichungen ausdrücken. Jede Umgestaltung einer Formel liefert dann einen neuen Satz, und die Auflösung einer Gleichung die Lösung der geometrischen Aufgabe.

Nun ist bereits bekannt, dass Summe und Differenz zweier Strecken wieder eine Strecke (15, 16), ihr Quotient aber eine Zahl ist (19). Es ist also noch zu untersuchen, welche Bedeutung das Product zweier Strecken hat.

## 1) Der Flächenraum als Streckenproduct.

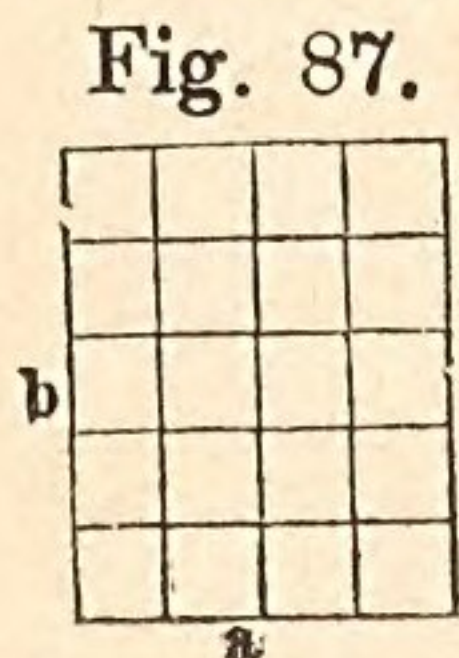
**142. Masseinheit.** — Wie zwei Strecken, so kann man auch zwei Figuren (Flächenräume) durch einander messen, indem man bestimmt, wie oft die eine in der anderen enthalten ist. An der Figur aber, welche man als Mass benutzen will, ist nicht nur die Grösse, sondern auch die Gestalt beliebig. Es ist allgemein üblich, das Quadrat als Massfigur zu nehmen.

Nur eine Figur, das Rechteck, lässt sich direct durch das Quadrat messen, d. h. in Quadrate zerlegen; die Messung der übrigen Figuren wird durch Rechnung bewerkstelligt.

**143. Das Rechteck.** — Es sei  $m$  das gemeinsame Mass zweier anstossender Seiten ( $a, b$ ) eines Rechtecks, und  $p$ -mal in  $a$ ,  $q$ -mal in  $b$  enthalten, so dass

$$a = pm, \quad b = qm$$

ist. Theilt man dann  $a$  in  $p$  und  $b$  in  $q$  gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte jeder Seite





Parallelen zur andern, so zerfällt das Rechteck in congruente Quadrate ( $M$ ). — Setzt man  $m = 1$ , so geben die Zahlen  $p$  und  $q$  die Länge der Seiten  $a$  und  $b$  an, und jedes der erhaltenen Quadrate hat die Längeneinheit als Seite. Setzt man auch  $M = 1$ , so ist die Fläche des Rechtecks durch die Zahl ausgedrückt, welche angiebt, in wieviel Quadrate das Rechteck zerfällt.

Es kommt jetzt darauf an, diese Zahl zu bestimmen. Dazu bieten sich der Reihe nach 3 Methoden.

- 1) Man zählt alle Quadrate einzeln.
- 2) Da alle Quadrate in  $q$  wagerechten Reihen stehen, deren jede  $p$  Quadrate enthält, so genügt es, die Quadrate einer senkrechten und einer wagerechten Reihe zu zählen, und die erhaltenen Zahlen zu multipliciren.

3) Da jede senkrechte Reihe soviel Quadrate enthält, wie die Seite  $b$  Längeneinheiten, und jede wagerechte Reihe soviel Quadrate, wie die Seite  $a$  Längeneinheiten, so genügt es, statt der Quadrate die Längeneinheiten der Seiten  $a$  und  $b$  zu zählen ( $a$  und  $b$  durch  $m$  zu messen), und die erhaltenen Zahlen zu multipliciren.

Die Anzahl der Quadrate ist nach jeder dieser Zählungen  $pq$ .

Anm. Zur wirklichen Ausmessung eines Rechteckes durch eine der beiden ersten Methoden würde man ein wirkliches Flächenmass (etwa eine hölzerne quadratische Tafel) gebrauchen. (Wie würde die Ausmessung nach diesen Methoden bewerkstelligt werden?) Die dritte Methode erfordert nur ein Längenmass zur Messung der Strecken  $a$  und  $b$ , und zeigt, wie die Flächenmessung durch Längenmessungen und eine Rechnung ersetzt werden kann.

Man versteht nun unter dem *Producte zweier Strecken*, die durch eine Längeneinheit gemessen sind, den Flächenraum des mit dem Producte ihrer Masszahlen multiplicirten Quadrates, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Anm. Setzt man dieses Quadrat  $= 1$ , so erhält man die in Nr. 114 gegebene vorläufige Erklärung des Productes zweier Strecken, welche dort nur einen arithmetischen, keinen geometrischen Sinn hatte.

Aus dieser Erklärung und der vorher gegebenen Bestimmung der Fläche des Rechtecks folgt unmittelbar der Satz:

Die Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Producte zweier anstossenden Seiten. 351.

Sind die beiden Strecken eines Productes einander gleich, so geht das Product in das arithmetische Quadrat der einen Strecke über, und aus 351 folgt:



352. Die Fläche eines Quadrates ist gleich dem (arithmetischen) Quadrat einer Seite.

**144. Das Parallelogramm.** — Ein Parallelogramm ist nach 140 einem Rechteck mit gleicher Grundlinie und Höhe gleich. Sind  $a$  und  $b$  zwei anstossende Seiten dieses Rechtecks, so ist  $a$  die Grundlinie, und  $b$  die Höhe des Parallelogramms; also folgt aus 351:

353. Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe.

Anm. Sind  $a$  und  $b$  zwei anstossende Seiten eines Parallelogramms,  $h_1$  und  $h_2$  die auf  $a$ , bezw.  $b$  stehenden Höhen, so ist  $ah_1 = bh_2$  oder  $\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}$ ; in Worten?

**145. Das Dreieck.** — Aus 141 und 353 folgt:

354. Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.

Sind  $a, b, c$  die Seiten eines Dreiecks,  $h_1, h_2, h_3$  die bezw. darauf stehenden Höhen, so ist nach 354:

$$\frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2},$$

oder:  $\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}; \quad \frac{b}{c} = \frac{h_3}{h_2}; \quad \frac{c}{a} = \frac{h_1}{h_3};$

355. d. h.: Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

**146. Das Trapez.** — Ist von einem Dreieck, dessen Grundlinie  $a$ , dessen Höhe  $h$  ist, durch eine Parallele zu  $a$  ein Dreieck abgeschnitten, dessen Grundlinie  $a_1$ , Höhe  $h_1$  ist, so ist die Fläche des übrig bleibenden Trapezes (nach 354):

$$F = \frac{ah}{2} - \frac{a_1h_1}{2}.$$

Nun ist (271, 243)

$$\frac{a}{h} = \frac{a_1}{h_1} \text{ oder } ah_1 = a_1h,$$

also  $F = \frac{ah}{2} - \frac{a_1h}{2} + \frac{a_1h}{2} - \frac{ah_1}{2} - \frac{a_1h_1}{2} = \frac{a + a_1}{2} \cdot (h - h_1),$

d. h., da  $h - h_1$  die Höhe des Trapezes ist:

356. Die Fläche eines Trapezes ist gleich dem Product aus seiner Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.



**147. Polygone.** — Sind  $a, b, c \dots$  die Seiten eines Polygons, welches einem Kreise mit dem Radius  $\varrho$  umbeschrieben ist, so zerfällt dasselbe, wenn man den Mittelpunkt des Kreises mit seinen Ecken verbindet, in Dreiecke, deren Grundlinien  $a, b, c \dots$  sind, deren Höhen alle gleich  $\varrho$  sind. Demnach ist der Flächenraum des Polygons

$$F = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \dots = \frac{\varrho(a + b + \dots)}{2},$$

oder, wenn  $\frac{a + b + \dots}{2} = p$  gesetzt wird:

$$F = p\varrho;$$

d. h.: Die Fläche eines dem Kreise umbeschriebenen 357. Polygons ist gleich dem halben Product aus Umfang und Radius.

Anm. Andere geradlinige Figuren müssen, wenn ihr Flächenraum berechnet werden soll, in Dreiecke zerlegt werden.

## 2) Vergleichung der Flächenräume mehrerer Figuren.

**148. Quotient von Flächenräumen.** — Die Flächen zweier Dreiecke,  $F$  und  $F_1$ , verhalten sich (147) wie die Producte aus Grundlinie und Höhe, also

$$1) \quad \frac{F}{F_1} = \frac{ah}{a_1h_1}.$$

Ist nun einer der an  $a$  und  $a_1$  anliegenden Winkel in beiden Dreiecken gleich ( $\beta = \beta_1$ ), so sind die diesen Winkel enthaltenden rechtwinkligen Dreiecke ähnlich (245), und es ist (nach 243):

$$\frac{h}{h_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Dies in 1) eingesetzt, giebt:

$$2) \quad \frac{F}{F_1} = \frac{ac}{a_1c_1},$$

d. h.: Die Flächenräume zweier Dreiecke, die in einem 358. Winkel übereinstimmen, verhalten sich, wie die Producte der diesen Winkel einschliessenden Seiten.

Ist auch der andere an  $a$  und  $a_1$  anliegende Winkel in beiden Dreiecken gleich ( $\gamma = \gamma_1$ ), so sind sie ähnlich (345), und es ist (nach 243):

$$\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}.$$



Dies in 2) eingesetzt, giebt:

$$3) \quad \frac{F}{F_1} = \frac{a^2}{a_1^2},$$

359. d. h.: Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Theilt man zwei ähnliche Polygone durch Diagonalen, die von zwei Ecken ausgehen, in Dreiecke, so sind dieselben paarweise ähnlich (271). Sind nun im ersten Polygon  $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$  die Seiten,  $d_1, d_2, d_3 \dots$  die von der Ecke ( $a_0 a_1$ ) ausgehenden Diagonalen, und  $D_1, D_2, D_3 \dots$  die Flächenräume der durch diese Diagonalen der Reihe nach abgeschnittenen Dreiecke, und ebenso im zweiten  $b_1, b_2 \dots$  die Seiten,  $e_1, e_2 \dots$  die Diagonalen,  $E_1, E_2 \dots$  die Dreiecksflächen, so ist (nach 359)

$$\frac{D_1}{E_1} = \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{d_1^2}{e_1^2}; \quad \frac{D_2}{E_2} = \frac{d_1^2}{e_1^2} = \frac{d_2^2}{e_2^2}; \quad \frac{D_3}{E_3} = \frac{d_2^2}{e_2^2} = \frac{d_3^2}{e_3^2}; \quad \dots$$

folglich 
$$\frac{D_1}{E_1} = \frac{D_2}{E_2} = \frac{D_3}{E_3} = \dots = \frac{a_1^2}{b_1^2},$$

also (nach Th. I, 108)

$$\frac{D_1 + D_2 + D_3 + \dots}{E_1 + E_2 + E_3 + \dots} = \frac{a_1^2}{b_1^2};$$

360. d. h.: Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen.

Nach 222 können Kreislinien als regelmässige Polygone betrachtet werden, die nach 284 stets ähnlich sind. Demnach folgt aus 360:

361. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Radien.

149. *Summe von Flächenräumen.* — Sind  $a$  und  $b$  die Katheten,  $c$  die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks,  $c_1$  und  $c_2$  bzw. die Projectionen von  $a$  und  $b$  auf  $c$ , so ist [nach 259, 1)]:

$$a^2 = c_1 c; \quad b^2 = c_2 c,$$

362. also

$$a^2 + b^2 = (c_1 + c_2) c = c^2,$$

welche Formel den schon bekannten Pythagoräischen Satz (150) ausdrückt. \*)

\*) Die mit diesem Satze in Zusammenhang stehende Aufgabe: Drei ganze Zahlen  $a, b, c$  zu finden, die der Bedingung genügen:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

wird dadurch gelöst, dass man in der Formel

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$$



Sind die Seiten  $a, b, c$  des rechtwinkligen Dreiecks homologe Seiten von drei ähnlichen Polygonen, deren Flächenräume bezw. durch  $F_1, F_2, F_3$  ausgedrückt sind, so ist nach 360:

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{a^2}{c^2}; \quad \frac{F_2}{F_3} = \frac{b^2}{c^2}; \quad \text{also} \quad \frac{F_1 + F_2}{F_3} = \frac{a^2 + b^2}{c^2},$$

oder, da nach 362  $a^2 + b^2 = c^2$  ist:

$$F_1 + F_2 = F_3;$$

d. h.: Bilden die homologen Seiten dreier ähnlicher Polygone ein rechtwinkliges Dreieck, so ist die Fläche des Hypotenusen-Polygons gleich der Summe der Flächen der Katheten-Polygone. 363.

Anm. Von diesem Satze ist der pythagoräische ein specieller Fall. Statt der Polygone können (nach 361) auch Kreisflächen eintreten.

Sind  $a, b, c$  die Seiten eines beliebigen Dreiecks,  $c_1$  und  $c_2$  bezw. die Projectionen von  $a$  und  $b$  auf  $c$  (Fig. 88), und  $h$  die zu  $c$  gehörige Höhe, so ist (362)

$$a^2 = h^2 + c_1^2, \quad b^2 = h^2 + c_2^2,$$

also (wenn  $a > b$  ist)

$$a^2 - b^2 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2)(c_1 - c_2).$$

Nun ist entweder

$$c_1 + c_2 = c, \quad \text{d. h.:} \quad c_1 = c - c_2,$$

oder

$$c_1 - c_2 = c, \quad \text{d. h.:} \quad c_1 = c + c_2,$$

je nachdem der Seite  $a$  ein spitzer oder ein stumpfer Winkel gegenüberliegt; man erhält also durch Einsetzung dieser Werthe:

$$a^2 - b^2 = c(c \mp 2c_2) = c^2 \mp 2cc_2,$$

oder:

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cc_2;$$

d. h.: In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der andern Seiten, vermehrt oder vermindert um das doppelte Product aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie, je nachdem die erste Seite einem stumpfen oder spitzen Winkel gegenüberliegt. 364.

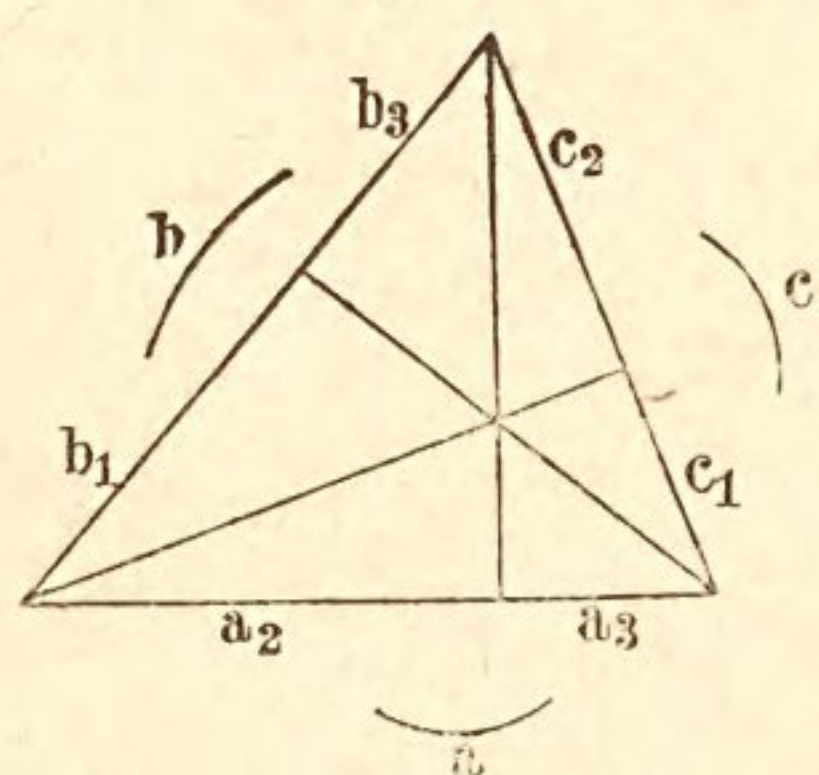
für  $p$  und  $q$  zwei beliebige (keinen gemeinsamen Factor enthaltende) ganze Zahlen nimmt (von denen eine durch 2 theilbar ist), und  $a = p^2 - q^2$ ,  $b = 2pq$ ,  $c = p^2 + q^2$  setzt. Die für  $a, b, c$  sich ergebenden Zahlengruppen (die man durch Multiplication jeder Gruppe mit einer beliebigen Zahl vielfältigen kann) heissen Pythagoräische Dreieckszahlen. Aufstellung derselben für die einziffrigen Werthe von  $p$  und  $q$ ! Aufsuchung zweier solcher Dreiecke, welche eine gleiche Kathete haben, und Zusammenlegung derselben zu einem schiefwinkligen Dreiecke. Welche Eigenschaften haben die Fläche und die Höhen desselben?



Anm. Dieser Satz heisst der allgemeine Pythagoräische. Er geht in den letzteren über, wenn der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter ist. Der Wortausdruck des Satzes vereinfacht sich, wenn man die Projection einer Seite auf eine andere Seite als positiv, auf die Verlängerung einer Seite als negativ ansieht.

Andere Ableitung von 364: Sind im Dreieck  $abc$  (Fig. 88) die Höhen gezogen, so folgt aus der Aehnlichkeit je zweier rechtwinkliger Dreiecke, die einen Winkel des Dreiecks  $abc$  gemeinsam haben:

Fig. 88.



$$1) aa_2 = bb_1; 2) bb_3 = cc_2; 3) cc_1 = aa_3.$$

1) und 3) addirt geben:

$$a(a_2 + a_3) = bb_1 + cc_1.$$

Nun ist

$$a_2 + a_3 = a; b_1 = b - b_3; c_1 = c - c_2;$$

dies eingesetzt giebt:

$$a^2 = b^2 - bb_3 + c^2 - cc_2,$$

oder, mit Rücksicht auf 2):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_2.$$

Sind  $a_1$  und  $b_1$  die Seiten eines anderen Dreiecks, welches die Grundlinie  $c$  enthält, und dessen Spitze auf  $h$  oder dessen Verlängerung liegt, so ist, da die Projectionen von  $b$  und  $b_1$  zusammenfallen,

$$a_1^2 = b_1^2 + c^2 - 2cc_2;$$

folglich:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Jeder Punkt von  $h$  hat also die Eigenschaft, dass die Differenz der Quadrate seiner Abstände von den Endpunkten der Seite  $c$  beständig denselben Werth hat. Dies giebt den Satz:  
365. Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten ( $A, B$ ) eine gegebene Grösse  $f^2$  hat, ist die auf  $AB (= c)$  in der Entfernung  $d = \frac{c^2 - f^2}{2c}$  von einem Endpunkte errichtete Senkrechte.

Anm. Die Strecke  $d$  ist auf  $AB$  selbst oder auf der Verlängerung abzutragen, je nachdem  $c > f$ , oder  $c < f$  ist.

Die nach der Seite  $c$  gehende Mittellinie  $t$  theilt das Dreieck in zwei Dreiecke mit den Seiten  $a, t, \frac{c}{2}$ ;  $b, t, \frac{c}{2}$ . In diesen Dreiecken ist nach 364, wenn  $t_1$  die Projection von  $t$  auf  $c$  ist:

$$a^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2t_1 \cdot \frac{c}{2};$$

$$b^2 = t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2t_1 \cdot \frac{c}{2};$$



also durch Addition:

$$a^2 + b^2 = 2t^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

d. h.: In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate 366. zweier Seiten gleich dem doppelten Quadrat der halben dritten Seite, vermehrt um das doppelte Quadrat der nach der dritten gezogenen Mittellinie.

Sind  $a_1$  und  $b_1$  die Seiten eines anderen Dreiecks, welches die Stücke  $c$  und  $t$  enthält, so ist

$$a_1^2 + b_1^2 = 2t^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Die Spitze eines aus  $c$  und  $t$  gebildeten Dreiecks hat also die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate ihrer Abstände von den Endpunkten der Seite  $c$  beständig denselben Werth hat. Da nach 168 der geometrische Ort dieser Spitze eine Kreislinie ist, so hat man den Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen 367. die Summe der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten ( $A, B$ ) eine gegebene Grösse  $2f^2$  hat, ist die aus der Mitte von  $AB (= c)$  mit dem Radius

$\sqrt{f^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$  beschriebene Kreislinie.

### 3) Construction der Wurzeln einer Gleichung.

**150. Vorbemerkung.** — Sind zur Lösung einer geometrischen Constructionsaufgabe Strecken in fester Lage gegeben, so lässt sich die Lösung der Aufgabe oft auf die Aufsuchung einer oder mehrerer noch unbekannter Strecken zurückführen. Gelingt es dann, zwischen den bekannten und den unbekannten Strecken, mittelst der in der Aehnlichkeitslehre und im Abschnitt über rechnende Geometrie aufgestellten Sätze, ebensoviele Gleichungen aufzustellen als Unbekannte angenommen sind, so erhält man durch Elimination dieser Unbekannten bis auf eine (nach Th. I, Nr. 97) eine Gleichung, aus der man, wenn sie vom ersten oder zweiten Grade ist (oder sich in solche Gleichungen zerlegen lässt), die unbekannte Strecke construiren kann.

**151. Die Gleichung vom ersten Grade.** — Bedeuten  $x, a, b, c, \dots$  Strecken, so ist die Normalform dieser Gleichung (vgl. Th. I, Nr. 92)

$$ax = bc \quad \left( \text{oder } x = \frac{bc}{a} \right).$$



Indem man beiderseits durch  $ab$  dividirt, folgt:

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{a}.$$

Also kann  $x$  nach Aufgabe 10 (S. 106) als vierte Proportionale zu  $a, b, c$  construirt werden.

Eine allgemeinere Gestalt der Normalform ist

$$a_1 a_2 a_3 \dots x = b b_1 b_2 b_3 \dots \left( \text{oder } x = \frac{b b_1 b_2 b_3 \dots}{a_1 a_2 a_3 \dots} \right).$$

In diesem Falle setzt man

$$c = \frac{b b_1}{a_1} \left( x = \frac{c b_2 b_3 \dots}{a_2 a_3 \dots} \right),$$

und construirt  $c$  in der vorher angegebenen Weise. Dann setzt man

$$d = \frac{c b_2}{a_2} \left( x = \frac{d b_3 \dots}{a_3 \dots} \right),$$

construirt  $d$  ebenso, und setzt dieses Verfahren fort, bis die einfache Normalform hergestellt ist.

**152. Die rein quadratische Gleichung.** — Dieselbe lässt sich stets auf die Normalform bringen:

$$x^2 = ab.$$

Anm. Factoren, die etwa noch bei  $x^2$  stehen, werden durch das soeben beschriebene Verfahren entfernt.

Demnach kann  $x$  nach Aufgabe 13 (S. 113) als mittlere Proportionale zu  $a$  und  $b$  construirt werden.

Anm. Da es bei der Bestimmung von Strecken durch Gleichungen nur auf ihre absolute Grösse, nicht aber auf ihr Vorzeichen ankommt, so giebt die rein quadratische Gleichung nur eine Lösung einer geometrischen Aufgabe.

**153. Die gemischt quadratische Gleichung.** — Dieselbe lässt sich stets auf die Normalform bringen:

$$x^2 + ax = b^2.$$

Anm. Factoren bei  $x^2$  werden, wie oben, weggeschafft, während die rechte Seite der Gleichung sich durch das soeben beschriebene Verfahren stets als Quadrat darstellen lässt.

Indem man auf beiden Seiten  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$  addirt (vgl. Th. I, Nr. 99), erhält man:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



Durch Vergleichung mit 362 folgt, dass  $\left(x + \frac{a}{2}\right)$  Hypotenuse desjenigen rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten  $b$  und  $\frac{a}{2}$  sind. Demnach ist  $x + \frac{a}{2}$  leicht zu construiren.

Setzt man nun  $b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = c^2$ , also  $x + \frac{a}{2} = \pm c$ , so folgt:

$$x_1 = +c - \frac{a}{2}; \quad x_2 = -c - \frac{a}{2}.$$

Aus  $x + \frac{a}{2}$  findet man also  $x$ , indem man  $\frac{a}{2}$  auf der Strecke  $c$  ab-, oder an dieselbe anträgt.

Anm. Die gemischt quadratische Gleichung liefert also im Allgemeinen zwei Lösungen einer geometrischen Aufgabe. Da  $\frac{a}{2} < c$ , so ist eine der gefundenen Strecken positiv, die andere negativ. — Sind die Wurzeln einer rein oder gemischt quadratischen Gleichung imaginär, so ist die Aufgabe in dem beabsichtigten Sinne nicht lösbar, und man bezeichnet die durch die Strecke  $x$  zu bestimmenden Punkte selbst als imaginäre. (Beispiel: Wie weit sind die Schnittpunkte einer Secante von dem auf ihr senkrechten Durchmesser entfernt, wenn  $a$  der Abstand der Secante vom Mittelpunkt,  $r$  der Radius des Kreises, und  $a > r$  ist? — Bezeichnet man die gesuchte Strecke durch  $x$ , so findet sich:  $x^2 = r^2 - a^2 = -(a^2 - r^2)$ ; also sind die Wurzeln der Gleichung, die Strecken  $x_1$  und  $x_2$ , und die Endpunkte derselben, d. h. die Schnittpunkte der Secante mit der Kreislinie, imaginär.)

Ist  $n$  ein Zahlfactor, der bei einer Strecke  $a$  steht, so ist auch  $na$  eine Strecke, und kann gleich  $a_1$  gesetzt werden. Steht aber  $n$  bei einem Quadrate, so setzt man  $na^2 = a_1^2$ , und construirt  $a_1$  als mittlere Proportionale zwischen  $na$  und  $a$ .

Aus der Gleichung

$$x^4 + pa^2x^2 = qa^4,$$

worin  $p$  und  $q$  beliebige Zahlen sind, erhält man:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}a^2\right)^2 = a^4\left(q + \frac{p^2}{4}\right);$$

$$x^2 + \frac{p}{2}a^2 = a^2\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Construirt man nun  $\frac{a}{2} \cdot pa = b^2$ ;  $a \cdot \left(q + \frac{p^2}{4}\right)a = c^2$ ;  $ac = d^2$ , so geht die letzte Gleichung über in

$$x^2 + b^2 = d^2,$$

woraus  $x$  sich construiren lässt.







$$3) \quad t_1 = \frac{2rs_1}{\sqrt{4r^2 - s_1^2}}.$$

$$4) \quad s_1 = \frac{2rt_1}{\sqrt{4r^2 + t_1^2}}.$$

### b. Spezielle Polygone.

**156. Das Sechseck.** — Der Centriwinkel des regelmässigen Sechsecks ist (nach 213) gleich  $\frac{2}{3}R$ , demnach ist sein Bestimmungsdreieck gleichseitig (103), und es ist

$$s_6 = r.$$

Anm. Construction des regelmässigen Sechsecks in einen Kreis, indem man den Radius sechsmal nach einander als Sehne einträgt.

**157. Das Viereck.** — Der Centriwinkel des regelmässigen Vierecks ist gleich  $R$ , demnach ist sein Bestimmungsdreieck gleichschenkelig rechtwinklig, und man hat (362)

$$s_4^2 = 2r^2,$$

oder:

$$s_4 = r\sqrt{2}.$$

Anm. Construction des regelmässigen Vierecks in einen Kreis mittelst zweier auf einander senkrechter Durchmesser.

**158. Das Zehneck.** — Berechnung. — Der Centriwinkel des regelmässigen Zehnecks ist gleich  $\frac{2}{5}R$ , demnach jeder Basiswinkel seines Bestimmungsdreiecks  $\frac{4}{5}R$ . Halbirt man daher den Basiswinkel  $B=2\alpha$  des Bestimmungsdreiecks  $\overline{OAB}$  (Fig. 90), so ist  $\overline{OCB}$  gleichschenkelig (Umk. z. 98), also

$$\overline{OC} = \overline{CB}.$$

Ferner ist  $\overline{ABC} \sim \overline{AOB}$  (245), d. h., da  $OA = OB$ , so ist auch

$$\overline{AB} = \overline{CB}.$$

Setzt man nun  $AB = CB = OC = x$ , so folgt aus der Aehnlichkeit von  $\overline{ABC}$  und  $\overline{AOB}$ :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}, \text{ oder } \frac{r-x}{x} = \frac{x}{r},$$

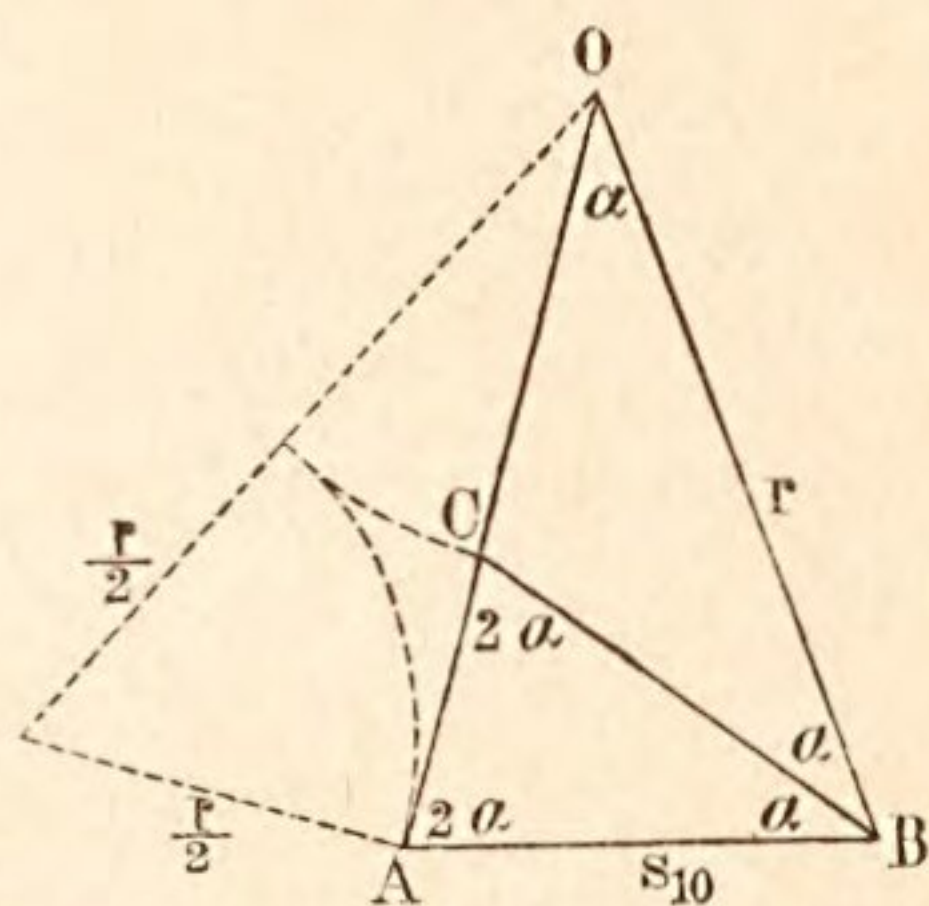
oder:

$$x^2 + rx = r^2.$$

Hieraus findet man, da  $x = s_{10}$  ist:

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Fig. 90.





Construction. — Aus der Gleichung  $x^2 + rx = r^2$  folgt

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Demnach trage man auf der Hypotenuse des aus  $r$  und  $\frac{r}{2}$  als Katheten construirten rechtwinkligen Dreiecks die kleinere Kathete  $\frac{r}{2}$  ab; der Rest ist  $s_{10}$ .

**159.** Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitt (stetige Theilung). — Aus der oben gefundenen Proportion

$$\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$$

folgt, wenn wir die Werthe  $r-x=AC$ ,  $x=OC$ ,  $r=OA$  einsetzen:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{OC}{OA}.$$

Demnach ist die Strecke  $OA$  im Punkte  $C$  so getheilt, dass der grössere Theil die mittlere Proportionale ist zwischen dem kleineren Theile und der ganzen Strecke. — Diese Art der Theilung einer Strecke heisst stetige, oder Theilung nach dem goldnen Schnitt.

Die Construction der Seite des regelmässigen Zehnecks aus dem Radius des umbeschriebenen Kreises ist hiernach gleichzeitig die Lösung der

Aufgabe 14. — Eine gegebene Strecke nach dem goldnen Schnitt zu theilen. (S. Fig. 90.)

Umgekehrt kann man die Eigenschaft der Seite des regelmässigen Zehnecks durch den Satz ausdrücken:

368. Die Seite eines regelmässigen Zehnecks ist gleich dem grösseren Abschnitt des stetig getheilten Radius im umbeschriebenen Kreise.

**160.** Das Fünfeck. — Der Centriwinkel des regelmässigen Fünfecks ist gleich  $\frac{4}{15}R$ , oder, da  $\frac{4}{15} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$  ist, gleich der Differenz zwischen den Centriwinkeln des regelmässigen Sechsecks und Zehnecks. Die Construction des regelmässigen Fünfecks ist in dem hieraus folgenden Satze enthalten:

369. Die Seite eines regelmässigen Fünfecks ist die dritte Seite des aus den Seiten des regelmässigen Sechs- und Zehnecks gebildeten Dreiecks im umbeschriebenen Kreise.



Die Berechnung der Seite des regelmässigen Fünfzehneckes erfolgt (wenn in dem eben beschriebenen Dreieck  $\overline{ABC}$  die Seite des Sechsecks  $AB$ , die des Zehneckes  $AC$ , und der Fusspunkt der aus  $C$  auf  $AB$  gefällten Höhe  $C_1$  ist) mittelst der Formeln:

$$s_{10}^2 = s_6^2 + s_{15}^2 - 2s_6 \cdot BC_1 \quad (364); \quad \frac{BC_1}{s_{15}} = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{s_{10}^2}{4}}}{r},$$

(da  $BCC_1 \sim$  dem halben Bestimmungsdreieck des Zehneckes.) Setzt man  $s_6 = r$ , und zur Abkürzung  $s_{15} = x$ ,  $s_{10} = y$ , so findet sich:

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{4}} - \frac{y}{2} \sqrt{3},$$

oder, wenn man für  $y$  seinen Werth einsetzt:

$$s_{15} = \frac{r}{4} \left[ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3} \right].$$

**161. Abgeleitete Polygone.** — Mit Hilfe der Sätze 216 und 217 kann man construiren, und mittelst der Formeln 1) und 2) (Nr. 154) berechnen:

| aus dem regelmässigen | die regelmässigen Polygone von |
|-----------------------|--------------------------------|
| Sechseck . . .        | 3. 12. 24. 48. . . .           |
| Viereck . . .         | 8. 16. 32. . . .               |
| Zehneck . . .         | 5. 20. 40. 80. . . .           |
| Fünfzehneck . . .     | 30. 60. 120. . . . Ecken.      |

Und mit Hilfe der Formel 3) (Nr. 155) kann man aus jedem dieser Polygone, wenn es in den Kreis eingeschrieben ist, das entsprechende, dem Kreise umschriebene Polygon berechnen.

Anm. Ausser den oben erwähnten regelmässigen Polygonen lassen sich auf elementarem Wege (d. h. mit Lineal und Cirkel) nur noch diejenigen construiren, deren Seitenzahl von der Form  $2^n + 1$ , und durch keine andere Zahl theilbar ist. Dies trifft zu für  $n = 2, 4, 8 \dots$ , also für die regelmässigen Polygone von 5, 17, 257 . . . Seiten. — Für die Seiten anderer regelmässiger Polygone muss man sich mit Näherungswerthen begnügen. So ist die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmässigen Siebenecks nahezu gleich der halben Seite des regelmässigen Dreiecks.

### c. Der Kreis.

**162.** Durch die oben erwähnten Formeln kann man Seite und Umfang eines in oder um den Kreis beschriebenen regelmässigen Polygons von beliebig hoher Seitenzahl durch den Radius  $r$  oder den Durchmesser  $d$  ausdrücken, indem man von einem der vier Hauptpolygone (am einfachsten vom Sechseck)



ausgeht. Nun folgt aus den Sätzen 220, 223; 225, 227, dass die Zahl, welche das Verhältniss des Umfangs eines regelmässigen Polygons zum Durchmesser des umbeschriebenen oder einbeschriebenen Kreises ausdrückt, dem Verhältniss zwischen der Kreislinie und ihrem Durchmesser um so näher kommt, je grösser die Seitenzahl ist. Ferner bleibt die für ein umbeschriebenes Polygon berechnete Verhältnisszahl, wiewohl abnehmend, stets grösser, die für das einbeschriebene Polygon berechnete stets kleiner als das Verhältniss der Kreislinie zum Durchmesser. — Drückt man also alle diese (irrationalen) Verhältnisszahlen durch Decimalbrüche aus, so werden in den Zahlen für den Umfang des einbeschriebenen und den des umbeschriebenen  $n$ -Ecks um so mehr Anfangsstellen übereinstimmen, je grösser  $n$  ist. Diese übereinstimmenden Stellen sind daher genaue Stellen derjenigen Zahl, welche das Verhältniss der Kreislinie zu ihrem Durchmesser ausdrückt. Diese Zahl wird kurz durch den Buchstaben  $\pi$  bezeichnet und die Ludolphsche Zahl\*) genannt. Sie ist nur in der Form eines unendlichen nicht periodischen Decimalbruchs bekannt, und nur näherungsweise zu bestimmen. Ihre ersten Stellen sind

370. 
$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

Anm. Näherungswerthe von  $\pi$  in kürzerer Form: 1) 3,1416. — Man kann ferner irgend einen abgekürzten Werth des Decimalbruchs als gewöhnlichen Bruch schreiben, diesen in einen Kettenbruch verwandeln und dessen Näherungswerthe bestimmen (Th. I, Nr. 144 u. 148) Solche Näherungswerthe sind 2) der Archimedische,\*\*)  $\frac{22}{7}$ , und der Metiusche,\*\*\*)  $\frac{355}{113}$ . (Man verwandle diese Brüche in Decimalbrüche und überzeuge sich durch Vergleichung mit 370 von dem Grade ihrer Genauigkeit.) — Durch Methoden der Funktionslehre gestaltet sich übrigens die Berechnung von  $\pi$  unvergleichlich einfacher, als durch die oben beschriebene, welche z. B. bei Benutzung des 192-Ecks nur die drei ersten Decimalstellen von  $\pi$  liefert. Im Ganzen sind 500 Stellen berechnet.

163. *Umfang des Kreises.* — Bezeichnet man den Umfang des Kreises mit  $u$ , so ist nach dem Vorhergehenden  $\frac{u}{2r} = \pi$ ,  
371. oder 
$$u = 2r\pi.$$

Ist  $\alpha$  der Centriwinkel eines Bogens  $a$ , so ist nach 287

372. 
$$\frac{a}{2r\pi} = \frac{\alpha}{4R}, \text{ oder } a = r\pi \cdot \frac{\alpha}{2R}.$$

\*) Ludolph v. Ceulen (um 1586) berechnete  $\pi$  bis auf 35 Stellen.

\*\*) Archimedes aus Syracus, 287—212 fand die nach ihm benannte Verhältnisszahl durch Berechnung des 96-Ecks.

\*\*\*) Peter Metius, Prof. in Franeker (um 1550).







Ist  $\alpha$  der Centriwinkel eines Sectors  $s^2$ , so ist nach 287

$$\frac{s^2}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{4R}, \text{ oder } s^2 = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{4R}.$$

Setzt man hierin aus 372 den Werth  $r\pi \cdot \frac{\alpha}{2R} = a$  ein, so folgt:

$$s^2 = \frac{ar}{2},$$

374. d. h.: Die Fläche eines Sectors ist gleich dem Product aus dem Bogen und dem halben Radius.

Anm. Ein specieller Fall von 374 ist 373. Mit Berücksichtigung von 354 lässt sich ein Dreieck angeben, welchem der Sector oder der ganze Kreis flächengleich ist. — Die Fläche eines Segments wird als Differenz von Sector und Dreieck berechnet.

---



## Anhang.

### Die Curven zweiter Ordnung.

165. *Vorbemerkung.* — In der elementaren Geometrie betrachtet man nur diejenigen Gebilde (ausser dem Punkte), welche durch eine einfache Bewegung entstehen (vgl. Einl. d), nämlich die gerade und die Kreislinie. Zwar ist die Bewegung des Punktes, welcher die letztere beschreibt, eine zusammengesetzte, aber die Strecke, deren Endpunkt dieser Punkt ist, führt durch ihre Drehung eine einfache Bewegung aus. Man sagt daher auch, elementar seien diejenigen Gebilde und Constructionen, welche durch Lineal und Cirkel hergestellt werden können.

Alle anderen Linien (Curven) ausser der Geraden und der Kreislinie entstehen durch eine zusammengesetzte Bewegung und unterscheiden sich durch das Gesetz dieser Bewegung. Von diesem Gesetze sei hier nur bemerkt, dass es sich durch eine Gleichung mit 2 Unbekannten ausdrücken lässt, und dass die Curve algebraisch oder transcendent genannt wird, je nachdem diese Gleichung algebraisch oder transcendent ist. (Vgl. Th. I, Nr. 91.) Man theilt die algebraischen Curven ein nach der Zahl der Punkte, in welchen sie von einer Geraden geschnitten werden können (oder auch nach der Zahl der Tangenten, die man von einem Punkte an sie ziehen kann), und sagt, eine Curve sei von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung, wenn sie von einer Geraden in  $n$  Punkten geschnitten werden kann (von der  $n^{\text{ten}}$  Klasse, wenn von einem Punkte  $n$  Tangenten an sie gezogen werden können). Hiernach ist die Gerade eine Curve  $1^{\text{ter}}$  Ordnung (der Punkt, als Grenzfall des Kreises betrachtet, eine Curve  $1^{\text{ter}}$  Klasse), die Kreislinie eine Curve  $2^{\text{ter}}$  Ordnung (und  $2^{\text{ter}}$  Klasse).

Es sollen nun im Folgenden die übrigen Curven  $2^{\text{ter}}$  Ordnung nach ihrer Entstehung und ihren wichtigsten Eigenschaften betrachtet werden. Zu diesem Zwecke ist das Gesetz,



welches der Entstehung der Kreislinie zu Grunde lag, zu verallgemeinern.

**166. Allgemeines Bewegungsgesetz der Curven 2<sup>ter</sup> Ordnung.** — Die Kreislinie war durch das Gesetz bestimmt, dass der Abstand eines ihrer Punkte ( $X$ ) von einem festen Punkte  $O$  eine Strecke von bestimmter Grösse ( $r$ ) sei.

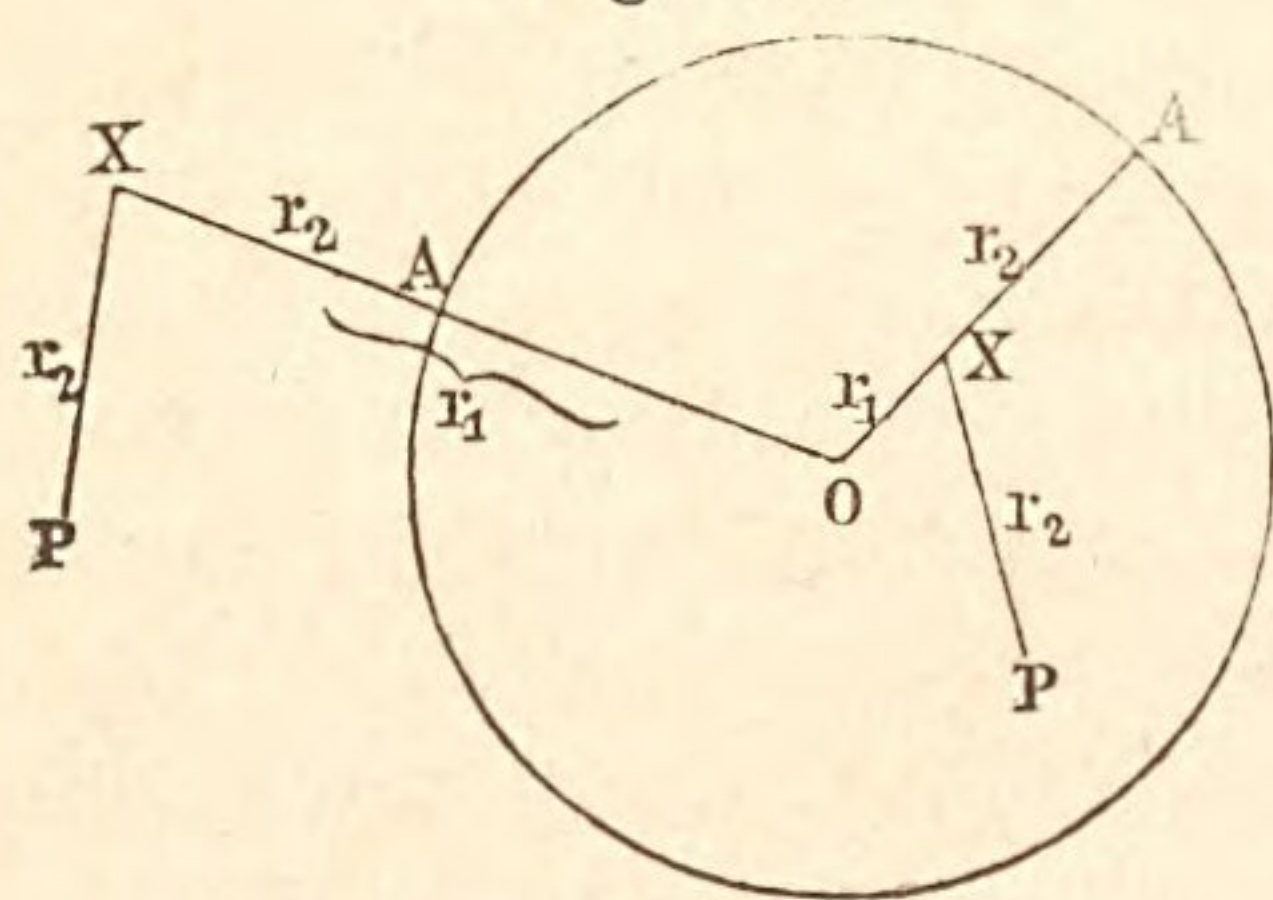
Dieses Gesetz wird verallgemeinert, wenn man einen zweiten festen Punkt  $P$  annimmt, und bestimmt, dass Summe oder Differenz der Abstände ( $r_1$  und  $r_2$ ) eines Punktes ( $X$ ) von den beiden festen Punkten ( $O$  und  $P$ ) eine Strecke von bestimmter Grösse ( $r$ ) sei. Dieses Gesetz wird also lauten

$$r_1 \pm r_2 = r. \quad (OX \pm XP = r.)$$

(Fallen die Punkte  $O$  und  $P$  zusammen, so ist  $r_1 = r_2$ , und für das obere Zeichen  $2r_1 = r$ , oder  $r_1 = \frac{r}{2}$ . In diesem Falle

ist also der geometrische Ort des Punktes  $X$  wieder eine Kreislinie. Und die Kreislinie ist hierdurch als specieller Fall derjenigen Curve gekennzeichnet, welche der Punkt  $X$  bei dem Bewegungsgesetze  $r_1 + r_2 = r$  beschreibt.)

Fig. 92.



Beschreibt man um  $O$  eine Kreislinie mit dem Radius  $r$ , welche die Strecke  $OX$  oder ihre Verlängerung in  $A$  schneidet (Fig. 92), so ist  $XA = r_2 = XP$ . Man kann also die Lage des Punktes  $X$  auch durch das Gesetz bestimmen, dass die Abstände desselben von einem festen Punkte  $P$  und einer festen Kreislinie (um  $O$

mit  $r$  beschrieben) einander gleich seien. In der Gleichung  $r_1 \pm r_2 = r$  gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem  $P$  innerhalb oder ausserhalb des aus  $O$  mit  $r$  beschriebenen Kreises liegt. (Der Uebergangsfall, wobei  $P$  auf der Kreislinie liegt, giebt die durch  $O$  und  $P$  bestimmte Gerade als geometrischen Ort des Punktes  $X$ .)

### 1) Bewegungsgesetz $r_1 + r_2 = r$ . — Die Ellipse.

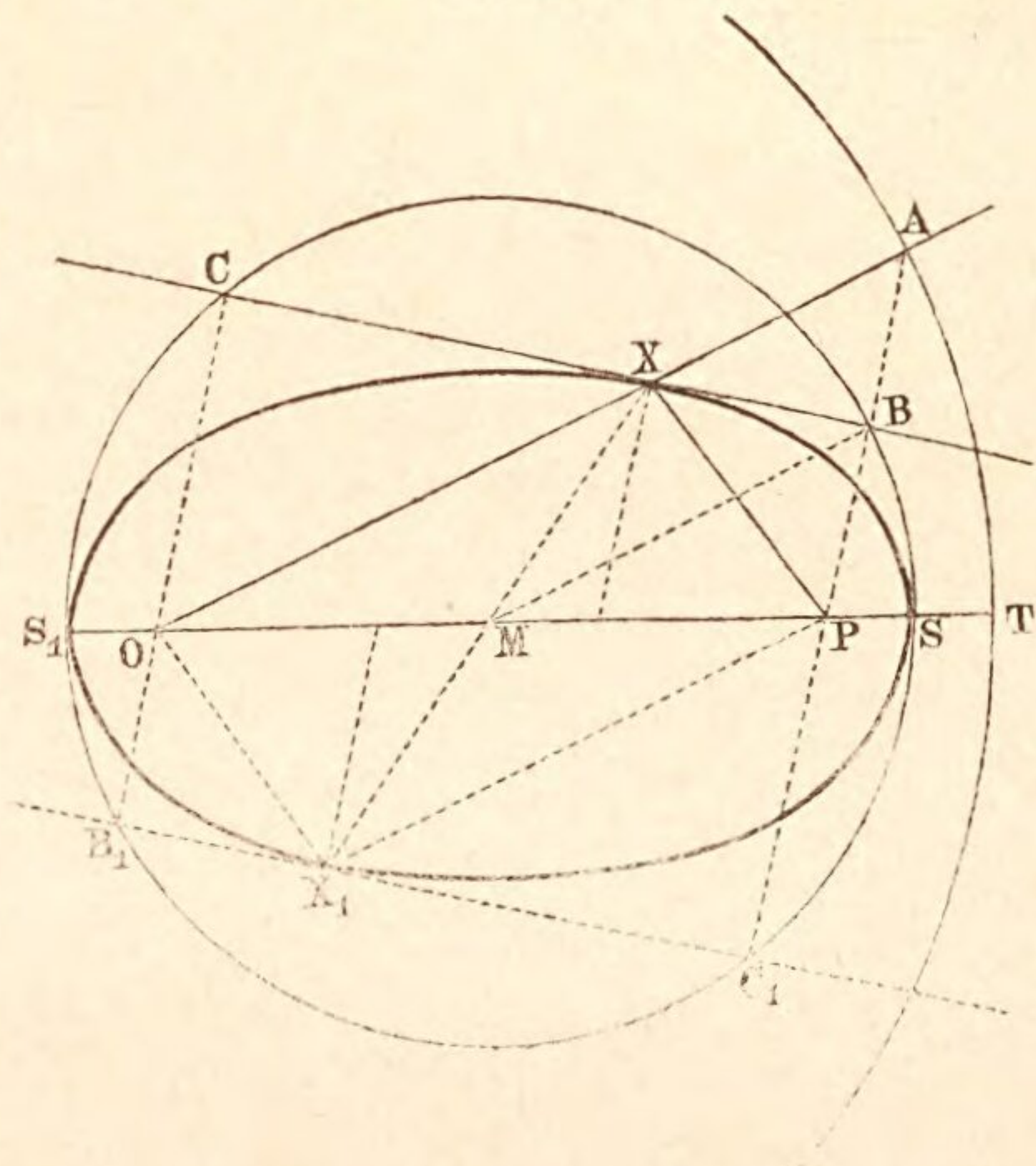
**167. Entstehung der Ellipse.** — Wenn eine Strecke um einen ihrer Endpunkte  $O$  eine ganze Umdrehung macht, und ein auf ihr liegender Punkt  $X$  sich inzwischen so auf ihr be-



wegt, dass er von einer aus  $O$  beschriebenen Kreislinie und einem innerhalb derselben liegenden Punkte  $P$  stets gleichweit entfernt ist, so beschreibt dieser Punkt  $X$  eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird.

Jeder Richtung der sich drehenden Geraden entspricht ein Punkt  $A$  der Kreislinie und ein Punkt  $X$  der Ellipse. Zu jedem Punkte der Kreislinie gehört also ein Punkt der Ellipse. Wir nennen daher diese Kreislinie den Leitkreis der Ellipse, und den Punkt  $A$  den Leitpunkt zu  $X$ .

Fig. 93.



Da  $XA = XP$ , so geht die in der Mitte ( $B$ ) von  $AP$  auf dieser Strecke errichtete Senkrechte durch  $X$  (119). Da  $X$  auch auf  $OA$  liegt, so kann man hiernach zu jedem Punkte  $A$  der Kreislinie den zugehörigen Punkt der Ellipse  $X$  construiren, indem man  $A$  mit  $O$  und  $P$  verbindet, und in der Mitte von  $AP$  die Senkrechte errichtet, welche  $OA$  in  $X$  schneidet.

Kehrt der Punkt  $A$  nach einer ganzen Umdrehung in seine frühere Lage zurück, so thut  $X$  dasselbe. Und da aus dem Gesetze  $r_1 + r_2 = r$  folgt, dass  $r_1$  und  $r_2 < r$ , also kein Punkt der Ellipse um mehr als  $r$  von  $O$  und  $P$  entfernt ist, so ist die Ellipse ebenso wie die Kreislinie eine im Endlichen bleibende, in sich zurückkehrende Curve.

**168. Secanten.** — Gelangt der Punkt  $A$  durch eine halbe Umdrehung der Geraden in die Lage  $A_2$ , so erhält man einen entsprechenden Punkt der Ellipse ( $X_2$ ), welcher auf  $OA_2$  liegt. Daher schneidet jede durch  $O$  gezogene Gerade die Ellipse in zwei Punkten. Allgemein:

Die Ellipse wird von jeder Geraden, die durch 375. einen innerhalb ihres Umfanges liegenden Punkt geht, in zwei Punkten geschnitten.

Die durch  $O$  und  $P$  gehende Sehne der Ellipse (deren Endpunkte  $S$  und  $S_1$  sind) heisst die grosse Axe.



Vervollständigt man das Dreieck  $\overline{OXP}$  zum Parallelogramm  $\overline{OXPX_1}$ , so ist (nach 126)

$$OX_1 + X_1P = OA = r.$$

Demnach ist auch  $X_1$  ein Punkt der Ellipse. (Der zugehörige Kreispunkt  $A_1$  ist der Schnittpunkt der verlängerten Strecke  $OX_1$  mit der Kreislinie.) Fällt insbesondere  $X$  mit  $S$ , und in Folge dessen  $X_1$  mit  $S_1$  zusammen, so geht die Beziehung  $OX_1 = PX$  über in

$$OS_1 = PS.$$

Da der Mittelpunkt ( $M$ ) des Parallelogramms gleichzeitig Mitte der Strecke  $OP$ , also für jeden Punkt  $X$  der Ellipse Mittelpunkt des Parallelogramms und ausserdem nach der letzten Formel auch Mitte der grossen Axe ist, so hat man den Satz:

376. Jede durch den Mittelpunkt der grossen Axe gehende Sehne der Ellipse wird in diesem Punkte halbart.

Der Mittelpunkt der grossen Axe heisst demnach Mittelpunkt, und jede durch ihn gehende Sehne Durchmesser der Ellipse.

Wie die Punkte  $X$  und  $X_1$ , so kann man nun auch die Punkte  $O$  und  $P$  mit einander vertauschen, da sie, wie jene, symmetrisch zu  $M$  liegen. Dieselbe Ellipse kann daher auch mittelst eines aus  $P$  mit  $r$  beschriebenen Leitkreises construirt werden. Die Punkte  $O$  und  $P$  führen nun den gemeinsamen Namen Brennpunkte, und die aus beliebigen Punkten der Ellipse nach einem der Brennpunkte gezogenen Strecken: Leitstrahlen (Radien Vektoren). Das Bewegungsgesetz der Ellipse lässt sich hiernach auch so aussprechen:

377. Für jeden Punkt der Ellipse hat die Summe der aus ihm gezogenen Leitstrahlen denselben Werth.

Anm. Auf dieser Eigenschaft beruht die sogenannte Fadenconstruction der Ellipse.

Ferner hat man den Satz:

378. Die aus den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Leitstrahlen bilden ein Parallelogramm.

Für den Punkt  $S$  geht die Formel  $XA = XP$  über in

$$ST = SP;$$

379. d. h.: Jeder Endpunkt der grossen Axe liegt in der Mitte zwischen seinem Leitpunkt und demjenigen Brennpunkte, welcher nicht Mittelpunkt des Leitkreises ist.



Ist  $S_1$  der zweite Endpunkt der grossen Axe, und  $T_1$  sein Leitpunkt, so ist nach 379

$$S_1 T_1 = S_1 P.$$

Dies zur vorigen Formel addirt, giebt:

$$ST + S_1 T_1 = SP + S_1 P$$

oder:  $2r - SS_1 = SS_1,$

oder:  $r = SS_1,$

d. h.: Die grosse Axe der Ellipse ist gleich dem Radius des Leitkreises oder gleich der Summe der beiden Leitstrahlen eines Punktes der Ellipse. 380.

Der auf der grossen Axe senkrecht stehende Durchmesser der Ellipse heisst die kleine Axe.

Anm. Ist  $X$  Endpunkt der kleinen Axe, so ist das Dreieck  $OPA$  bei  $P$  rechtwinklig.

**169. Eine Tangente.** — Aus der oben gegebenen Construction eines Punktes der Ellipse folgt, dass diese Curve der Weg des Schnittpunktes der durch die Strecken  $OA$  und  $BX$  bestimmten Geraden ist. Da aus jeder Strecke  $OA$  nur eine Strecke  $BX$  und ein Punkt  $X$  hervorgeht, so schneiden auch die Strecken  $OA$  und  $BX$  die Ellipse nur in dem einen Punkte  $X$ . Bei der Umdrehung um  $O$  kommt aber  $OA$  zweimal in dieselbe Gerade zu liegen (nämlich das zweitemal nach einer Drehung um  $2R$ ), während die Strecke  $BX$ , welche sich um den ausserhalb liegenden Punkt  $O$  dreht, erst nach einer ganzen Umdrehung in die ursprüngliche Gerade zurückkehrt. Daher hat die durch  $OA$  bestimmte Gerade (wie schon bekannt) zwei Punkte, dagegen die durch  $BX$  bestimmte Gerade nur einen Punkt mit der Ellipse gemeinsam, ist also Tangente an dieselbe.

Wie der Punkt  $X$  bei Umdrehung der Strecke  $OA$  die Ellipse beschreibt, so die Tangente  $BX$  die ganze Fläche der Ebene mit Ausnahme der von der Ellipse eingeschlossenen Figur. Man kann daher die Tangente ebenso wie den Punkt als das die Ellipse erzeugende Gebilde ansehen, und sagt, dass die Tangente in ihren verschiedenen Richtungen die Ellipse umhüllt. Man sagt von einem Punkte, er liege auf der convexen oder concaven Seite der Ellipse, je nachdem er von irgend einer Tangente getroffen wird oder nicht. Man kann also nur von einem Punkte, welcher auf der convexen Seite der Ellipse liegt, eine Tangente an diese Curve ziehen.



Da die Tangente  $BX$  den Winkel  $AXP$  halbirt, so ist auch  $CXO = BXP$ , und die in  $X$  auf der Tangente errichtete Senkrechte halbirt den Winkel  $OMP$ . Also:

381. Die Tangente in einem Punkte der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels der zugehörigen Leitstrahlen, und bildet mit diesen letzteren gleiche Winkel.

Hieraus folgt weiter:

382. Die Tangente in einem Endpunkte der kleinen Axe ist der grossen Axe parallel, und umgekehrt.

Da  $OM = MP$  (Fig. 93) und  $PB = BA$ , so ist  $MB \parallel OA$ , und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $OAP$  und  $MBP$  folgt, dass  $MB = \frac{1}{2} OA$ . Da dies für jede Lage der Punkte  $A$  und  $B$  gilt, und da  $B$  der Fusspunkt der aus dem Brennpunkte  $P$  auf die Tangente gefällten Senkrechten ist, so hat man den Satz:

383. Die Fusspunkte der aus einem Brennpunkte der Ellipse auf beliebige Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf der aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit der halben grossen Axe beschriebenen Kreislinie.

Diese Kreislinie geht durch die Endpunkte der grossen Axe, und hat dort mit der Ellipse gemeinsame Tangenten. Man sagt daher, dass die Kreislinie und die Ellipse sich in diesen Punkten berühren.

Ist  $L$  ein beliebiger Punkt der Tangente  $BC$ , so ist das Dreieck  $LBP$  rechtwinklig, also liegt  $B$  auf der über  $LP$  als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, und ist Schnittpunkt dieser und der über  $SS_1$  als Durchmesser beschriebenen Kreislinie. Im Allgemeinen also liefert ein Punkt zwei Tangenten an die Ellipse, ebenso wie reciprok eine Gerade zwei Durchschnittpunkte mit derselben.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangenten aus einem beliebigen Punkte  $L$  an die Ellipse, da der Punkt  $B$ , wie eben gezeigt, durch zwei geometrische Oerter bestimmt ist.

Rückt  $L$  in unendliche Ferne, so wird  $PL$  der Tangente parallel, und die über  $PL$  beschriebene Kreislinie geht über in die durch  $P$  senkrecht auf  $PL$  gezogene Gerade.

Anm. Durch diese Veränderung geht die vorige Aufgabe in folgende über: An eine Ellipse die Tangenten zu ziehen, die einer gegebenen Richtung parallel sind.

Ist  $X_1$  der Endpunkt des durch  $X$  gezogenen Durchmessers, so sind die Halbierungslinien der Winkel  $OMP$  und  $OX_1P$  paral-



lel, mithin auch die auf diesen Linien senkrecht stehenden Tangenten, und man hat den Satz:

Die beiden in den Endpunkten eines Durchmes- 384.  
sers gezogenen Tangenten sind parallel.

Nach 383 liegen die Fusspunkte  $B, C, B_1, C_1$  der aus den Brennpunkten auf diese Tangenten gefällten Senkrechten auf der die Ellipse in  $S$  und  $S_1$  berührenden Kreislinie. Da nun  $BC_1$  stets eine Sehne derselben ist, so hat das Product  $PB \cdot PC_1$  für jeden Punkt  $B$  der Kreislinie denselben Werth. Nun schneidet die durch den Mittelpunkt des Rechtecks  $\overline{BCB_1C_1}$  gezogene Gerade  $OP$  die Gegenseiten  $B_1C$  und  $BC_1$  so, dass  $OC = PC_1$  ist (134). Also hat auch  $PB \cdot OC$  für jede Tangente denselben Werth; d. h.:

Das Product der von den Brennpunkten auf eine 385.  
beliebige Tangente gefällten Senkrechten hat stets denselben Werth.

**170. Zwei Tangenten.** — Es seien  $X$  und  $X_1$  (Fig. 94), die Berührungspunkte der aus  $L$  an die Ellipse gezogenen Tangenten,  $A$  der Leitpunkt von  $X$  in dem aus  $P$ , und  $C$  der Leitpunkt von  $X_1$  in dem aus  $O$  gezogenen Leitkreise. Dann ist  $OA = PC = r$ ,  $LO = LC$ ,  $LA = LP$ , also Dreieck  $\overline{OLA} \cong \overline{CLP}$ , Winkel  $OLA = CLP$ , und, durch Subtraction von  $OLP$ ,  $PLA = CLO$ ,  $PLX = O LX_1$ ; d. h.:

Die von einem Punkte an die Ellipse gezogenen Tangenten bilden mit den nach den Brennpunkten gezogenen Geraden gleiche Winkel.

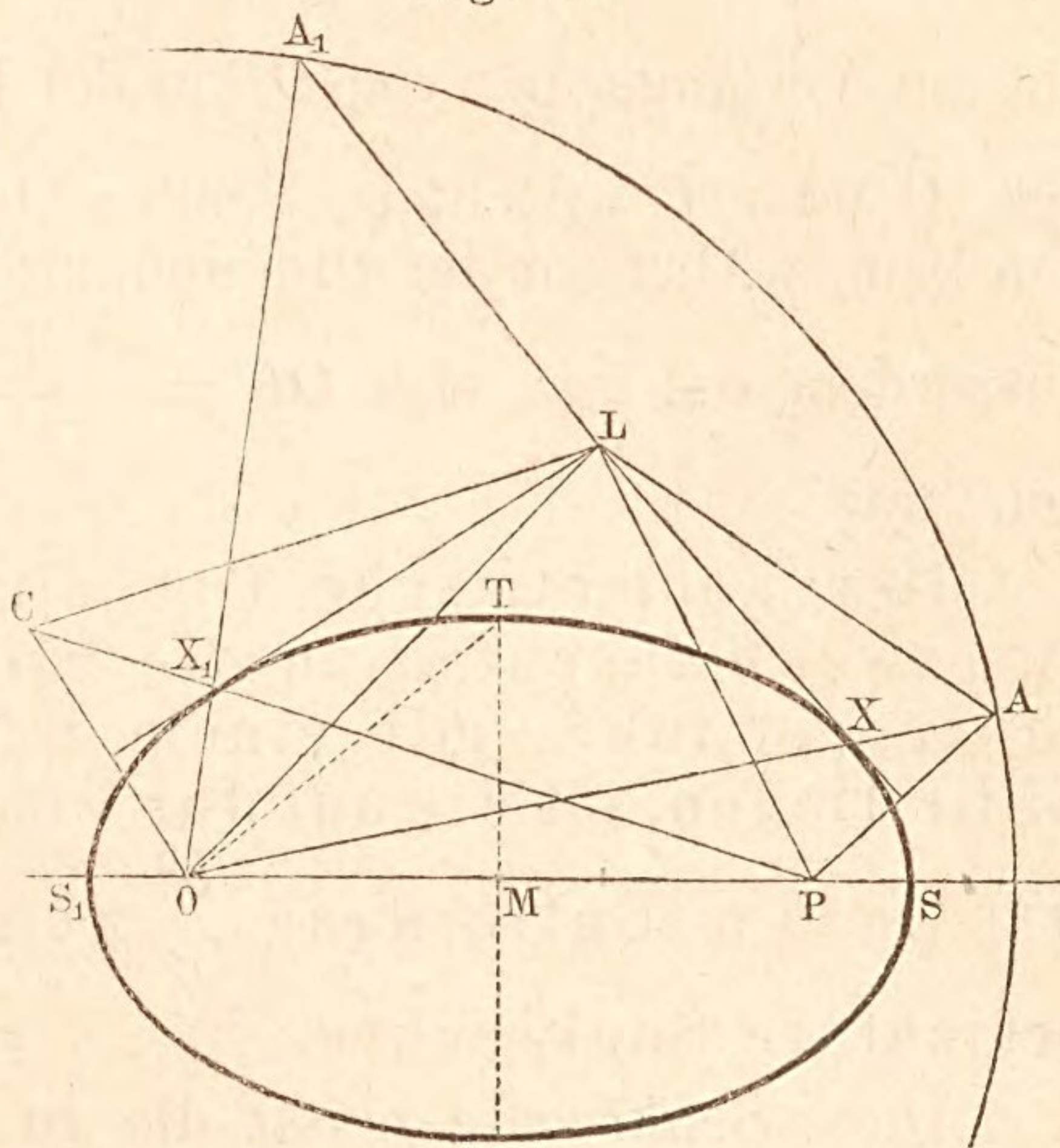
Specieller Fall. —  $X, LX = R$ . Dann ist auch  $OLA = R$ , mithin  $OL^2 + LA^2 = OA^2$ , oder:

$$LO^2 + LP^2 = r^2.$$

Nun ist nach 367 der geometrische Ort des Punktes  $L$  die

aus  $M$  mit  $ML = \sqrt{\frac{r^2}{2} - OM^2}$  beschriebene Kreislinie. Setzt

Fig. 94.



386.



man die halbe grosse Axe gleich  $a$ , die halbe kleine Axe gleich  $b$ , so ist (380)  $2a = r$ ,  $OT = TP = a$ ,  $OM^2 = a^2 - b^2$ , also  $ML = \sqrt{a^2 + b^2} = TS$ . Man hat also den Satz:

387. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei auf einander senkrecht stehende Tangenten an die Ellipse gehen, ist die aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit der Entfernung der Endpunkte der beiden Axen beschriebene Kreislinie.

Ist  $A_1$  der Leitpunkt von  $X_1$  in dem aus  $O$  beschriebenen Leitkreise, so ist  $LA = LP$  (120), und aus demselben Grunde  $LA_1 = LP$ , mithin  $LA_1 = LA$ ; ferner  $OL = OL$ ,  $OA_1 = OA$ ,  $\overline{OLA_1} \cong \overline{OLA}$ , und Winkel  $LOX = LOX_1$ , d. h.:

388. Gehen von einem Punkte zwei Tangenten an die Ellipse, so bildet jeder Leitstrahl des Punktes gleiche Winkel mit den nach demselben Brennpunkte gezogenen Leitstrahlen der Berührungspunkte.

Specieller Fall. —  $X_1OX = 2R$ . Dann ist  $LOA = R$ , mithin:  $LA^2 - OL^2 = OA^2$ , oder:

$$LP^2 - OL^2 = r^2.$$

Nun ist nach 365 der geometrische Ort des Punktes  $L$  die auf der Verlängerung von  $OP$  in der Entfernung  $OK = \frac{OP^2 - r^2}{2OP}$  von  $O$  oder  $P$  errichtete Senkrechte. Ferner ist, wenn man den halben Abstand der Brennpunkte  $OM$  gleich  $c$  setzt,  $OP = 2c$ , ausserdem  $r = 2a$ ; also  $OK = \frac{c^2 - a^2}{c} = -\frac{b^2}{c}$ . Man hat also den Satz:

389. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei Tangenten an die Ellipse gehen, deren Berührungspunkte mit einem Brennpunkte in gerader Linie liegen, ist die auf der Verlängerung der grossen Axe in der Entfernung  $\frac{b^2}{c}$  von diesem Brennpunkte errichtete Senkrechte.

Diese Senkrechte heisst die zu dem Brennpunkte gehörige Directrix der Ellipse. Jedem Brennpunkte entspricht also eine Directrix. Die durch den Brennpunkt gehende, der Directrix parallele Sehne heisst der Parameter der Ellipse.

Wenn die in  $X$  gezogene Tangente die beiden Directrix-



linien in  $L$  und  $L_1$  schneidet, so ist  $LOX = L_1PX = R$ , und  $LXO = L_1XP$  (381), also Dreieck  $\overline{LOX} \sim \overline{L_1PX}$ , und

$$\frac{OX}{PX} = \frac{LX}{L_1X}.$$

Wenn ferner die durch  $X$  zur grossen Axe gezogene Parallele die beiden Directrixlinien in  $H$  und  $H_1$  schneidet, so ist Dreieck  $\overline{HLX} \sim \overline{H_1L_1X}$ , also:

$$\frac{LX}{L_1X} = \frac{HX}{H_1X},$$

folglich durch Vergleichung mit der vorigen Proportion:

$$\frac{OX}{PX} = \frac{HX}{H_1X}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{OX + PX}{PX} = \frac{HX + H_1X}{H_1X}, \text{ oder } \frac{OA}{PX} = \frac{EH_1}{H_1X},$$

oder:

$$\frac{XP}{XH_1} = \frac{OA}{HH_1},$$

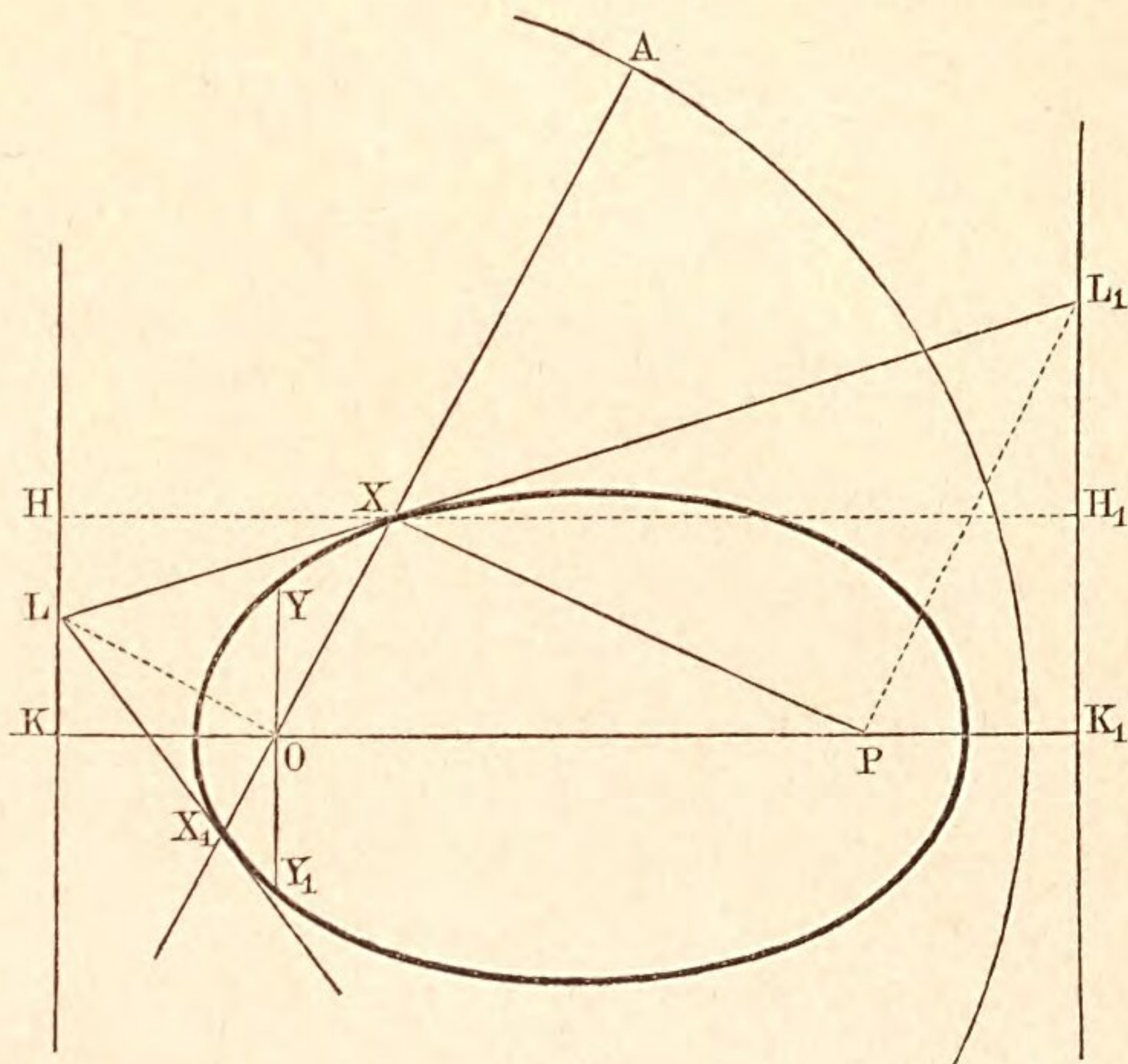
d. h.: Für jeden Punkt der Ellipse ist das Verhältniss 390. seiner Entfernungen von einem Brennpunkt und der zugehörigen Directrix gleich dem Verhältniss zwischen der grossen Axe und der Entfernung der beiden Directrixlinien.

Anm. Welchen Satz über den geometrischen Ort von  $X$  (als Mittelpunkt einer Kreislinie) liefert die Umkehrung von 390?

Die Entfernung der Directrixlinien ist gleich  $KO + OP + PK_1 = \frac{2b^2}{c} + 2c = \frac{2(b^2 + c^2)}{c} = \frac{2a^2}{c}$ . Demnach ist das eben genannte Verhältniss  $\frac{XP}{XH_1} = \frac{XO}{XH} = \frac{c}{a}$ .

Da  $XX_1 \perp LO$ , so sind die Berührungspunkte  $Y$  und  $Y_1$  der aus  $K$  an die Ellipse gezogenen Tangenten die Endpunkte

Fig. 95.





des Parameters. Ferner ist die Entfernung des Punktes  $Y$  von der zu  $O$  gehörigen Directrix gleich  $OK$ . Also ist nach der letzten Formel:

$$\frac{YO}{OK} = \frac{c}{a}; \quad YO = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Die Grösse des Parameters  $YY_1$  ist also  $\frac{2b^2}{a}$ .

Anm. Die Grösse  $\frac{c}{2a}$ , d. h. das Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte zur grossen Axe, heisst die Excentricität der Ellipse.

**171. Specielle Fälle der Ellipse.** — 1) Rückt  $P$  nach  $O$ , während  $r$  unverändert bleibt, so wird  $r_1 = r_2$ . Das Bewegungsgesetz der Ellipse heisst dann  $2r_1 = r$ . Demnach geht die Ellipse über in den aus  $O$  mit  $r$  beschriebenen Leitkreis. Die Kreislinie kann hiernach als Ellipse mit zusammenfallenden Brennpunkten betrachtet werden.

2) Entfernt sich  $P$  von  $O$ , bis  $OP = r$  ist, so ist in dem Dreieck  $\overline{OXP}$   $OX + XP = OP$ . Demnach ist der geometrische Ort von  $X$  die Strecke  $OP$ , und die Ellipse geht über in diese, aus zwei zusammenfallenden Strecken bestehende Strecke.

3) Rücken die Brennpunkte einer Ellipse vom Mittelpunkte aus nach beiden Seiten in unendliche Entfernung, während die kleine Axe unverändert bleibt, so geht die Ellipse über in das in den Endpunkten der kleinen Axe senkrecht zu derselben stehende Parallelenpaar.

Alle drei besonderen Arten der Ellipse zeigen noch die den Curven zweiter Ordnung eigenthümliche Eigenschaft, von einer Geraden in 2 Punkten, bezw. einem Doppelpunkte, geschnitten zu werden.

## 2) Bewegungsgesetz $r_1 - r_2 = r$ . — Die Hyperbel.

**172. Entstehung der Hyperbel.** — Wenn eine Gerade um einen ihrer Punkte  $O$  eine ganze Umdrehung macht, und ein auf ihr liegender Punkt  $X$  sich inzwischen so auf ihr bewegt, dass er von einer aus  $O$  beschriebenen Kreislinie und einem ausserhalb derselben liegenden Punkte  $P$  stets gleichweit entfernt ist, so beschreibt dieser Punkt  $X$  eine krumme Linie, welche Hyperbel genannt wird.

Jeder Richtung der sich drehenden Geraden entspricht ein Punkt  $A$  der Kreislinie und ein Punkt  $X$  der Hyperbel.







kommt (von 4. her) auf dem ersten Zweige aus unendlicher Entfernung wieder in die ursprüngliche Lage zurück.

Die Hyperbel ist also eine zweimal durch einen unendlich fernen Punkt gehende und auf diesem Wege in sich zurückkehrende Curve. Sie besteht aus zwei Zweigen, welche bezw. den Gesetzen  $r_1 - r_2 = +r$  und  $r_1 - r_2 = -r$  entsprechen, während für die unendlich fernen Punkte, welche die Grenzen beider Zweige bilden, gleichzeitig  $r_1 - r_2 = \pm r$  ist.

Anm. Ebenso kann man von der Geraden sagen, sie sei eine Curve, welche einmal durch einen unendlich fernen Punkt geht und auf diesem Wege in sich zurückkehrt.

**173. Secanten.** — Gelangt der Punkt  $A$  durch eine halbe Umdrehung der Geraden in die Lage  $A_2$ , so erhält man einen entsprechenden Punkt der Hyperbel ( $X_2$ ), welcher auf  $OA_2$  liegt. Daher schneidet jede durch  $O$  gezogene Gerade die Hyperbel in zwei Punkten. Allgemein:

393. Die Hyperbel wird von jeder Geraden, die durch einen mit  $O$  auf derselben Seite der Curve liegenden Punkt geht, in zwei Punkten geschnitten.

Anm. Wann liegen diese Punkte auf demselben, wann auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel?

Die durch  $O$  und  $P$  gehende Sehne der Hyperbel (deren Endpunkte  $S$  und  $S_1$  sind) heisst die Hauptaxe.

Vervollständigt man das Dreieck  $\overline{OXP}$  zum Parallelogramm  $\overline{OXPX_1}$ , so ist

$$PX_1 - OX_1 = OA = r.$$

Demnach ist auch  $X_1$  ein Punkt der Hyperbel. (Der zugehörige Kreispunkt  $A_1$  ist der Schnittpunkt der rückwärts verlängerten Strecke  $OX_1$  mit der Kreislinie. Fällt insbesondere  $X$  mit  $S$ , und in Folge dessen  $X_1$  mit  $S_1$  zusammen, so geht die Beziehung  $OX_1 = PX$  über in

$$OS_1 = PS.$$

Da der Mittelpunkt ( $M$ ) des Parallelogramms gleichzeitig Mitte der Strecke  $OP$ , also für jeden Punkt  $X$  der Hyperbel Mitte des Parallelogramms, und ausserdem nach der letzten Formel auch Mitte der Hauptaxe ist, so hat man den Satz:

394. Jede durch den Mittelpunkt der Hauptaxe gehende Sehne der Hyperbel wird in diesem Punkte halbiert.

Der Mittelpunkt der Hauptaxe heisst demnach Mittelpunkt, und jede durch ihn gehende Sehne Durchmesser der Hyperbel.



Wie die Punkte  $X$  und  $X_1$ , so kann man nun auch die Punkte  $O$  und  $P$  mit einander vertauschen, da sie, wie jene, symmetrisch zu  $M$  liegen. Dieselbe Hyperbel kann daher auch mittelst eines aus  $P$  mit  $r$  beschriebenen Leitkreises construirt werden. Die Punkte  $O$  und  $P$  führen nun den gemeinsamen Namen Brennpunkte, und die aus beliebigen Punkten der Hyperbel nach einem der Brennpunkte gezogenen Strecken: Leitstrahlen (Radien Vektoren). Das Bewegungsgesetz der Hyperbel lässt sich hiernach auch so aussprechen:

Für jeden Punkt der Hyperbel hat die Differenz 395. der aus ihm gezogenen Leitstrahlen denselben Werth.

Ferner hat man den Satz:

Die aus den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Leitstrahlen bilden ein Parallelogramm. 396.

Für den Punkt  $S$  geht die Formel  $XA = XP$  über in

$$ST = SP;$$

d. h.: Jeder Endpunkt der Hauptaxe liegt in der Mitte 397. zwischen seinem Leitpunkt und demjenigen Brennpunkte, welcher nicht Mittelpunkt des Leitkreises ist.

Ist  $S_1$  der zweite Endpunkt der grossen Axe, und  $T_1$  sein Leitpunkt, so ist nach 397

$$S_1 T_1 = S_1 P.$$

Von dieser Formel die vorige subtrahirt, giebt:

$$S_1 T_1 - ST = S_1 P - SP,$$

oder:

$$2r - SS_1 = SS_1,$$

oder:

$$r = SS_1;$$

d. h.: Die Hauptaxe der Hyperbel ist gleich dem Radius 398. des Leitkreises oder gleich der Differenz der beiden Leitstrahlen eines Punktes der Hyperbel.

Die in der Mitte der Hauptaxe senkrecht stehende Gerade heisst die Nebenaxe der Hyperbel.

**174. Eine Tangente.** — Aus der oben gegebenen Construction eines Punktes der Hyperbel folgt, dass diese Curve der Weg des Schnittpunktes der durch die Strecken  $OA$  und  $BX$  bestimmten Geraden ist. Man gelangt nun durch eine wörtliche Wiederholung der an entsprechender Stelle bei der Ellipse angestellten Betrachtung zu dem Resultat, dass die durch  $BX$  bestimmte Gerade nur einen Punkt mit der Hyperbel gemeinsam hat. Sie ist also Tangente an dieselbe.

Wie der Punkt  $X$  bei Umdrehung der Strecke  $OA$  die



Hyperbel beschreibt, so die Tangente  $BX$  die ganze Fläche der Ebene, mit Ausnahme der beiden von den Hyperbelzweigen begrenzten Räume, in welchen die Brennpunkte liegen. Man kann daher die Tangente ebenso wie den Punkt als das die Hyperbel erzeugende Gebilde ansehen, und sagen, dass die Tangente in ihren verschiedenen Richtungen die Hyperbel umhüllt. Man sagt von einem Punkte, er liege auf der convexen oder concaven Seite der Hyperbel, je nachdem er von irgend einer Tangente getroffen wird oder nicht. Man kann also nur von einem Punkte, welcher auf der convexen Seite der Hyperbel liegt, eine Tangente an diese Curve ziehen.

Da die Tangente  $BX$  den Winkel  $AXP$  halbirt, so hat man den Satz:

399. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel halbirt den Winkel der zugehörigen Leitstrahlen.

Hieraus folgt weiter:

400. Die Tangente in einem Endpunkte der Hauptaxe ist der Nebenaxe parallel.

Da  $OM = MP$  (Fig. 96) und  $AB = BP$ , so ist  $MB \parallel OA$ , und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $\overline{OAP}$  und  $\overline{MBP}$  folgt, dass  $MB = \frac{1}{2}OA$ . Da dies für jede Lage der Punkte  $A$  und  $B$  gilt, und da  $B$  der Fusspunkt der aus dem Brennpunkte  $P$  auf die Tangente gefällten Senkrechten ist, so hat man den Satz:

401. Die Fusspunkte der aus einem Brennpunkte der Hyperbel auf beliebige Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf der aus dem Mittelpunkte der Hyperbel mit der halben grossen Axe beschriebenen Kreislinie.

Diese Kreislinie geht durch die Endpunkte der Hauptaxe, und hat dort mit der Hyperbel gemeinsame Tangenten. Man sagt daher, dass die Kreislinie und die Hyperbel sich in diesen Punkten berühren.

Ist  $L$  ein beliebiger Punkt der Tangente  $BC$ , so ist das Dreieck  $\overline{LBP}$  rechtwinklig, also liegt  $B$  auf der über  $LP$  als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, und ist Schnittpunkt dieser und der über  $SS_1$  als Durchmesser beschriebenen Kreislinie. Im Allgemeinen also liefert ein Punkt zwei Tangenten an die Hyperbel, ebenso wie reciprok eine Gerade zwei Durchschnittspunkte mit derselben.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangenten aus einem beliebigen Punkte  $L$  an die Hyperbel, da der Punkt  $B$ , wie eben gezeigt, durch zwei geometrische Oerter bestimmt ist.



Rückt  $L$  in unendliche Ferne, so wird  $PL$  der Tangente parallel, und die über  $PL$  beschriebene Kreislinie geht über in die durch  $P$  senkrecht auf  $PL$  gezogene Gerade.

Anm. Durch diese Veränderung geht die vorige Aufgabe in folgende über: An eine Hyperbel die Tangenten zu ziehen, die einer gegebenen Richtung parallel sind. Da  $P$  ausserhalb des Berührungskreises liegt, so wird die in  $P$  auf  $PL$  errichtete Senkrechte die Kreislinie nicht immer schneiden; die Aufgabe hat demnach, wie leicht zu sehen, zwei, eine, oder keine Lösung, je nachdem der spitze Winkel, welchen die gegebene Gerade mit der Hauptaxe bildet, grösser, gleich, oder kleiner ist, als der spitze Winkel, den die Tangente eines unendlich fernen Punktes mit der Hauptaxe bildet.

Die zu den beiden unendlich fernen Punkten der Hyperbel gehörigen Tangenten heissen Asymptoten. Da die Asymptote diejenige durch  $B$  gezogene Gerade ist, welche mit  $OA$  (Fig. 97) parallel ist (denn beide Geraden stehen auf  $AP$  senkrecht), so geht sie auch durch  $M$ , weil, wie oben bemerkt,  $MB$  stets  $\parallel OA$ . Man hat also den Satz:

Die beiden Asymptoten schneiden sich im Mittelpunkt der Hyperbel.

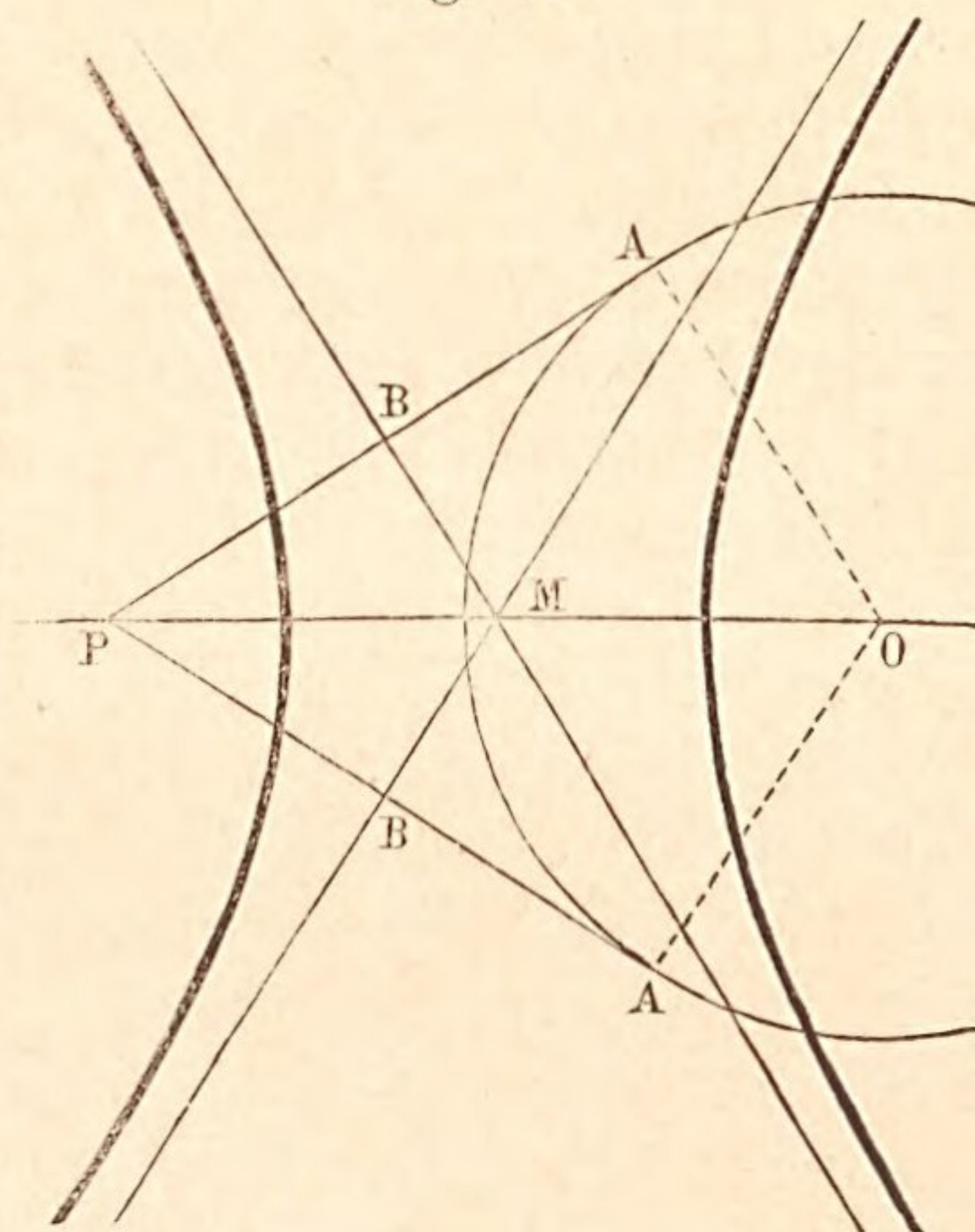
Anm. Die Asymptoten sind hiernach die aus dem Mittelpunkte an die Hyperbel gelegten Tangenten. — Aus der Definition der unendlich fernen Punkte und der Tangenten der Hyperbel folgt die Construction der Asymptoten. Man lege aus dem Brennpunkte  $P$  die Tangenten  $PA$  an den Leitkreis und errichte in der Mitte derselben ( $B$ ) die Senkrechten. — Die Hyperbelzweige nähern sich den Asymptoten fortwährend, ohne sie jedoch in endlicher Entfernung zu erreichen.

Ist  $X_1$  (Fig. 96) der Endpunkt des durch  $X$  gezogenen Durchmessers, so sind die Halbierungslinien der Winkel  $OX_P$  und  $OX_1P$  parallel. Dies sind aber die Tangenten in  $X$  und  $X_1$ ; man hat also den Satz:

Die beiden in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel. 403.

Nach 401 liegen die Fusspunkte  $B, C, B_1, C_1$  der aus den Brennpunkten auf diese Tangenten gefällten Senkrechten auf der die Hyperbel in  $S$  und  $S_1$  berührenden Kreislinie. Da nun  $BC_1$  stets eine Sehne derselben ist, so hat das Product

Fig. 97.





$PB \cdot PC_1$  für jeden Punkt  $B$  der Kreislinie denselben Werth. Nun schneidet die durch den Mittelpunkt des Rechtecks  $\overline{BCB_1C_1}$  gezogene Gerade  $OP$  die Verlängerungen der Gegenseiten  $\overline{B_1C}$  und  $\overline{BC_1}$  so, dass  $OC = PC_1$  ist. Also hat auch  $PB \cdot OC$  für jede Tangente denselben Werth; d. h.:

404. Das Product der von den Brennpunkten auf eine beliebige Tangente gefällten Senkrechten hat stets denselben Werth.

**175. Zwei Tangenten.** — Derjenige Winkel der Asymptoten, zwischen dessen Schenkeln ein Zweig der Hyperbel liegt, heisst Asymptotenwinkel. Von den durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden schneiden nur diejenigen, welche die Asymptotenwinkel theilen, die Curve in 2 Punkten; die Asymptoten selbst (als Tangenten) treffen die Curve in je einem Punkte; alle übrigen durch  $M$  gezogenen Geraden treffen sie gar nicht. Je nach der Beschaffenheit des Asymptotenwinkels heisst die Hyperbel rechtwinklig, spitzwinklig, stumpfwinklig. — Aus dem Begriff der Asymptoten folgt ferner:

405. Zwei Tangenten, die an denselben Hyperbelzweig gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte, der mit diesem Zweige zwischen den Schenkeln desselben Asymptotenwinkels liegt; zwei Tangenten, die an verschiedene Hyperbelzweige gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte, der ausserhalb der Schenkel der Asymptotenwinkel liegt.

406. Umgekehrt: Die Tangenten, welche von einem Punkte innerhalb der Schenkel des Asymptotenwinkels ausgehen, treffen beide den in demselben Raume liegenden Hyperbelzweig; die Tangenten, welche von einem Punkte ausserhalb der Schenkel des Asymptotenwinkels ausgehen, treffen jede einen anderen Zweig der Hyperbel.

Anm. Die folgende Betrachtung wird, wie Fig. 98 zeigt, den zweiten dieser beiden Fälle voraussetzen. Der erste unterscheidet sich nur dadurch, dass man statt des Winkels der Tangenten den Nebenwinkel zu setzen hat, wodurch Analogie mit den Sätzen der Ellipse entsteht.

Es seien  $X$  und  $X_1$  (Fig. 98) die Berührungspunkte der aus  $L$  an die Hyperbel gezogenen Tangenten,  $A$  der Leitpunkt von  $X$  in dem aus  $P$ , und  $C$  der Leitpunkt von  $X_1$  in dem aus  $O$  gezogenen Leitkreise. Dann ist  $OA = PC = r$ ,  $LO = LC$ ,  $LA = PL$ , also Dreieck  $\overline{OLA} \cong \overline{CLP}$ , Winkel  $OLA = CLP$ , und, durch Addition von  $CLA$ ,  $OLC = ALP$ ,  $OLX_1 = PLX$ ; d. h.:



Die von einem Punkte an die Hyperbel gezogenen 407.  
Tangenten bilden mit den nach den Brennpunkten  
gezogenen Geraden gleiche Winkel.

Spezieller Fall. —  
 $X_1LX = R$ . Dann ist auch  
 $OLA = R$ , mithin  $OL^2 + LA^2$   
 $= OA^2$ , oder:

$$LO^2 + LP^2 = r^2.$$

Nun ist nach 367 der geo-  
metrische Ort des Punktes  $L$  die

aus  $M$  mit  $ML = \sqrt{\frac{r^2}{2} - OM^2}$

beschriebene Kreislinie. Setzt  
man die halbe Hauptaxe gleich  $a$ ,  
und  $OM^2 - a^2 = b^2$ , so ist (398)

$$2a = r, \text{ also } ML = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

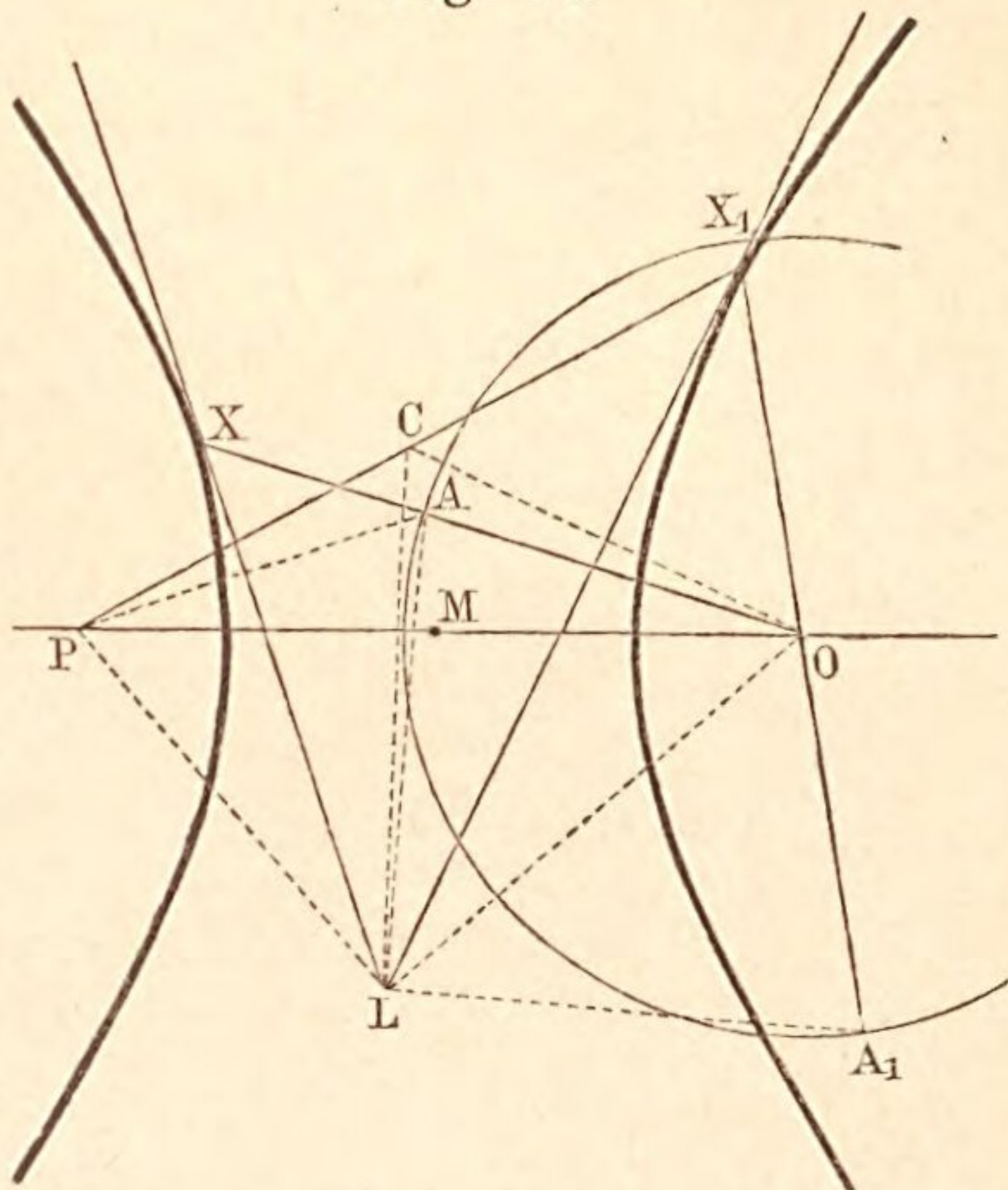
Man hat also den Satz:

Der geometrische Ort  
eines Punktes, von dem  
aus zwei auf einander senkrecht stehende Tangenten 408.  
an die Hyperbel gehen, ist die aus dem Mittelpunkte  
der Hyperbel mit dem Radius  $\sqrt{a^2 - b^2}$  beschriebene  
Kreislinie.

Anm. Der Radius  $\sqrt{a^2 - b^2}$  ist reell, imaginär, oder Null, je nach-  
dem  $a >, <, = b$  ist. — Im letzten Falle ist  $M$  der einzige Punkt, in  
welchem sich zwei Tangenten unter rechtem Winkel schneiden. Mithin  
sind diese Tangenten die Asymptoten, und die Hyperbel ist rechtwinklig. —  
Da der Asymptotenwinkel stets kleiner ist, als der Winkel zweier an den-  
selben Hyperbelzweig gehender Tangenten, so kann der letztere nur dann  
ein rechter sein, wenn der erstere spitz ist. Und da der Nebenwinkel  
des Asymptotenwinkels stets grösser ist, als der Winkel zweier an ver-  
schiedene Hyperbelzweige gehender Tangenten, so kann der letztere nur  
dann ein rechter sein, wenn der erstere stumpf ist. Ueberhaupt also kann  
der Winkel zweier Tangenten nur dann ein rechter sein, wenn der Asym-  
ptotenwinkel spitz ist. Dem Falle  $a > b$  entspricht also die spitzwinklige,  
dem Falle  $a < b$  die stumpfwinklige Hyperbel. (Die rechtwinklige Hyper-  
bel entspricht als spezieller Fall der allgemeinen Hyperbel ebenso wie  
der Kreis der Ellipse.)

Ist  $A_1$  der Leitpunkt von  $X_1$  in dem aus  $O$  beschriebenen  
Leitkreise, so ist  $LA = LP$  (120), und aus demselben Grunde  
 $LA_1 = LP$ , mithin  $LA_1 = LA$ ; ferner  $OL = OL$ ,  $OA_1 = OA$ ,  
 $\overline{OLA_1} \cong \overline{OLA}$ , Winkel  $LOA = LOA_1$ , und  $LOX + LOX_1 = 2R$ ,  
d. h.: Gehen von einem Punkte (ausserhalb der Schen- 409.

Fig. 98.





kel des Asymptotenwinkels) zwei Tangenten an die Hyperbel, so bildet jeder Leitstrahl des Punktes mit den nach demselben Brennpunkte gezogenen Leitstrahlen der Berührungspunkte zwei Winkel, deren Summe  $2R$  ist.

Spezieller Fall. —  $X_1OX=0$ . Dann ist  $LOA=R$ , mithin:  $LA^2 - OL^2 = OA^2$ , oder:

$$LP^2 - OL^2 = r^2.$$

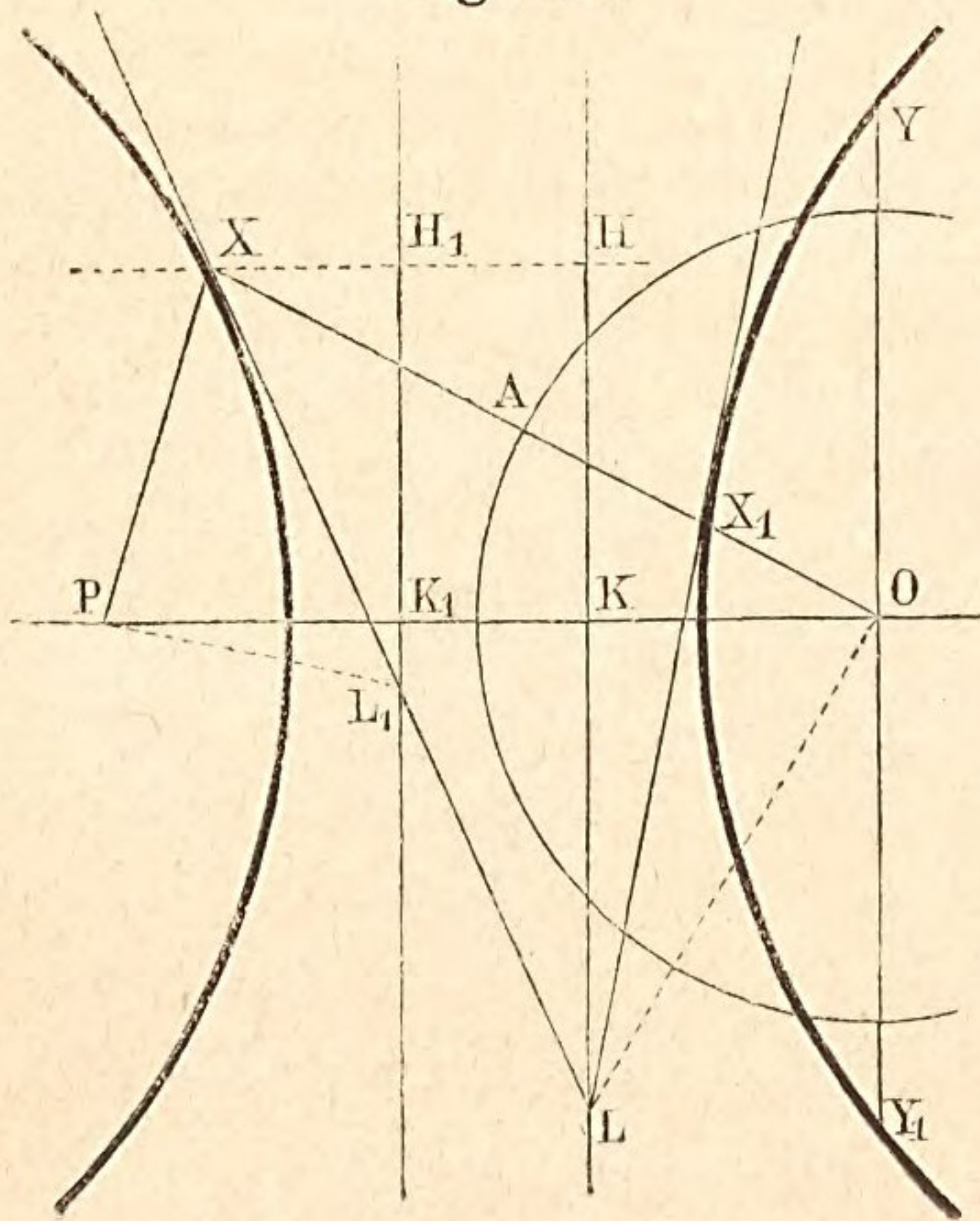
Nun ist nach 365 der geometrische Ort des Punktes  $L$  die auf  $OP$  in der Entfernung  $OK = \frac{OP^2 - r^2}{2OP}$  von  $O$  oder  $P$  er-

richtete Senkrechte. Ferner ist, wenn man den halben Abstand der Brennpunkte  $OM$  gleich  $c$  setzt,  $OP=2c$ , ausserdem  $r=2a$ ; also  $OK = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$ . Man hat also den Satz:

410. Der geometrische Ort eines Punktes, von dem aus zwei Tangenten an die Hyperbel gehen, deren Berührungspunkte mit einem Brennpunkte in gerader Linie liegen, ist die auf der Hauptaxe in der Entfernung  $\frac{b^2}{c}$  von diesem Brennpunkte errichtete Senkrechte.

Diese Senkrechte heisst die zu dem Brennpunkte gehörige Directrix der Hyperbel. Jedem Brennpunkte entspricht also eine Directrix. Die durch den Brennpunkt gehende, der Directrix parallele Sehne heisst der

Fig. 99.



Parameter der Hyperbel.

Wenn die in  $X$  gezogene Tangente die beiden Directrixlinien in  $L$  und  $L_1$  schneidet, so ist  $LOX = L_1PX = R$ , und  $LXO = L_1XP$  (399), also Dreieck  $\overline{LOX} \sim \overline{L_1PX}$ , und

$$\frac{OX}{PX} = \frac{LX}{L_1X}.$$

Wenn ferner die durch  $X$  zur Hauptaxe gezogene Parallele die beiden Directrixlinien in  $H$  und  $H_1$  schneidet, so ist Dreieck  $\overline{HLX} \sim \overline{H_1L_1X}$ , also



$$\frac{LX}{L_1X} = \frac{HX}{H_1X},$$

folglich durch Vergleichung mit der vorigen Proportion:

$$\frac{OX}{PX} = \frac{HX}{H_1X}.$$

Hieraus folgt weiter  $\frac{OX - PX}{PX} = \frac{HX - H_1X}{H_1X}$ , oder  $\frac{OA}{PX} = \frac{HH_1}{H_1X}$ ,

oder:  $\frac{XP}{XH_1} = \frac{OA}{HH_1}$ ,

d. h.: Für jeden Punkt der Hyperbel ist das Verhältniss seiner Entfernungen von einem Brennpunkt und der zugehörigen Directrix gleich dem Verhältniss zwischen der Hauptaxe und der Entfernung der beiden Directrixlinien. 411.

Anm. Welchen Satz über den geometrischen Ort von  $X$  (als Mittelpunkt einer Kreislinie) liefert die Umkehrung von 411?

Die Entfernung der beiden Directrixlinien ist gleich  $OP - OK - PK_1 = 2c - \frac{2b^2}{c} = \frac{2(c^2 - b^2)}{c} = \frac{2a^2}{c}$ . Demnach ist das

eben genannte Verhältniss  $\frac{XP}{XH_1} = \frac{XO}{XH} = \frac{c}{a}$ .

Da  $XX_1 \perp LO$ , so sind die Berührungspunkte  $Y$  und  $Y_1$  der aus  $K$  an die Hyperbel gezogenen Tangenten die Endpunkte des Parameters. Ferner ist die Entfernung des Punktes  $Y$  von der zu  $O$  gehörigen Directrix gleich  $OK$ . Also ist nach der letzten Formel:

$$\frac{YO}{OK} = \frac{c}{a}; \quad YO = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Die Grösse des Parameters  $YY_1$  ist also  $\frac{2b^2}{a}$ .

Anm. Die Grösse  $\frac{c}{2a}$ , d. h. das Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte zur grossen Axe, heisst die Excentricität der Hyperbel.

**176. Specielle Fälle der Hyperbel.** — 1) Rückt  $P$  nach  $O$ , so wird  $r_1 = r_2$ , also  $r = 0$ . Die Hyperbel geht über in ein durch  $O$  gehendes Paar von Geraden.

2) Entfernt sich  $P$  von  $O$ , bis  $OP = r$  ist, so ist in dem Dreieck  $\overline{OXP}$   $OX - XP = OP$ . Demnach ist der geometrische Ort von  $X$  die durch  $OP$  bestimmte Gerade mit Ausnahme der Strecke  $OP$ . Die beiden Theile der Geraden, welche zu beiden Seiten von  $OP$  liegen, entsprechen den beiden Hyperbelzweigen.







von  $AP$  die Senkrechte errichtet, welche jene Parallele in  $X$  schneidet.

Aus der Entstehung der Curve folgt, dass bei unbegrenzter Vorwärtsbewegung der Geraden auch  $X$  sich mit derselben ins Unendliche von  $o$  entfernt, ebenso aber auch von der Leitlinie. Die Parabel ist also eine, wie die Ellipse, aus einem Zweige bestehende, aber, wie die Hyperbel, unbegrenzte Curve.

Betrachtet man die Leitlinie als eine, durch ihren unendlich fernen Punkt in sich selbst zurückkehrende Curve, so entspricht diesem unendlich fernen Punkte ein unendlich ferner Punkt der Parabel. Also:

Jede Parabel hat einen unendlich fernen Punkt' 412. welcher gleichzeitig der unendlich ferne Punkt der sich verschiebenden Geraden ist.

*Secanten.* — Aus 375 folgt:

Die Parabel wird von jeder Geraden, die durch 413. einen mit  $P$  auf derselben Seite der Curve liegenden Punkt geht, in zwei Punkten geschnitten.

Die Gerade  $o$  heisst die Axe der Parabel.

Aus 412 folgt weiter:

Jede Parallele zur Axe schneidet die Parabel in 414. einem endlich und in dem unendlich fernen Punkte.

Mit dem Punkte  $O$  rückt auch der Mittelpunkt der Strecke  $OP$  in unendliche Entfernung. Daher:

Der Mittelpunkt der Parabel ist ihr unendlich 415. ferner Punkt.

Aus 415 folgt, dass die zur Axe gezogenen Parallelen die Stelle der Durchmesser vertreten.

Der Punkt  $P$  heisst Brennpunkt der Parabel, und die aus beliebigen Punkten der Curve nach dem Brennpunkte oder parallel zur Axe gezogenen Geraden: Leitstrahlen.

Für den Endpunkt der Axe  $S$  (Scheitel der Parabel) geht die Formel  $XA = XP$  über in

$$ST = SP,$$

d. h.: Der Scheitel der Parabel liegt in der Mitte 416. zwischen seinem Leitpunkt und dem Brennpunkt.

**178. Eine Tangente.** — Während die sich verschiebende Gerade sammt dem Punkte  $A$  in fortwährender Lagenänderung begriffen ist, dreht sich die Gerade  $BX$  um den Punkt  $P$ , ohne jemals in eine vorige Richtung zurückzukehren. Denn in dem



Masse, als  $A$  nach der einen oder andern Seite sich von  $T$  entfernt, nähert sich  $BX$  der zu  $o$  parallelen, bezw. entgegengesetzten Richtung, und macht also überhaupt nur eine halbe Umdrehung, während  $A$  die ganze Leitlinie durchläuft. Demnach kann auch  $BX$  in jeder Richtung nur einen Punkt mit der Curve gemeinsam haben, und heisst daher Tangente der Parabel.

Die Tangente beschreibt im Verlauf ihrer Drehung denjenigen von der Parabel begrenzten Theil der Ebene, welcher den Brennpunkt nicht enthält. Sie umhüllt in ihren verschiedenen Richtungen die Parabel und kann als das dieselbe erzeugende Gebilde angesehen werden. Ein Punkt der Ebene liegt auf der convexen oder der concaven Seite der Parabel, je nachdem er von irgend einer Tangente getroffen wird oder nicht. Man kann also nur von einem auf der convexen Seite der Parabel liegenden Punkte eine Tangente an diese Curve ziehen.

Aus 381 folgt:

417. Die Tangente in einem Punkte der Parabel steht senkrecht auf der Halbirungslinie des Winkels der zugehörigen Leitstrahlen, und bildet mit diesen letzteren gleiche Winkel
418. Die Scheiteltangente steht auf der Axe senkrecht. Da die Kreislinie, welche die Ellipse, bezw. Hyperbel in den Endpunkten ihrer Hauptaxe berührte, für die Parabel in ihre Scheiteltangente übergeht, so folgt weiter (383) der Satz:
419. Die Fusspunkte der aus dem Brennpunkte der Parabel auf beliebige Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf der Scheiteltangente.

Ist  $L$  ein beliebiger Punkt der Tangente  $BX$ , so ist das Dreieck  $\overline{LBP}$  rechtwinklig, also liegt  $B$  auf der über  $LP$  als Durchmesser beschriebenen Kreislinie, und ist Schnittpunkt dieser und der Scheiteltangente. Im Allgemeinen also liefert ein Punkt zwei Tangenten an die Parabel.

Anm. Hieraus folgt die Construction der Tangenten aus einem beliebigen Punkte  $L$  an die Parabel

Rückt  $L$  in unendliche Ferne, so geht die über  $PL$  beschriebene Kreislinie über in die durch  $P$  senkrecht auf  $PL$  gezogene Gerade. Da diese nur einen Punkt mit der Scheiteltangente gemeinsam hat, so kann man parallel zu einer gegebenen Richtung nur eine Tangente an die Parabel ziehen.

Anm. Die Construction dieser Tangente folgt aus dem eben Gesagten.



179. *Zwei Tangenten.* — Aus 386 folgt:

Die von einem Punkte an die Parabel gezogenen 420. Tangenten bilden mit der nach dem Brennpunkte, und der parallel zur Axe gezogenen Geraden gleiche Winkel. ( $PLX = O LX_1$ , Fig. 101.)

Specieller Fall. —

$X_1 LX = R$ . — Addirt man  $PLX = O LX_1$  und  $X_1 LP = X_1 LA_1$ , so folgt:  $X_1 LX = O LA_1$ . Ist nun  $X_1 LX = R$ , so ist auch  $O LA_1 = R$ , d. h. die drei Punkte  $L A A_1$  liegen auf derselben Geraden, und zwar auf der Leitlinie. Man hat also den Satz:

Die von irgend einem Punkte der Leitlinie an die Parabel gezogenen Tangenten bilden einen rechten Winkel.

Aus 388 folgt:

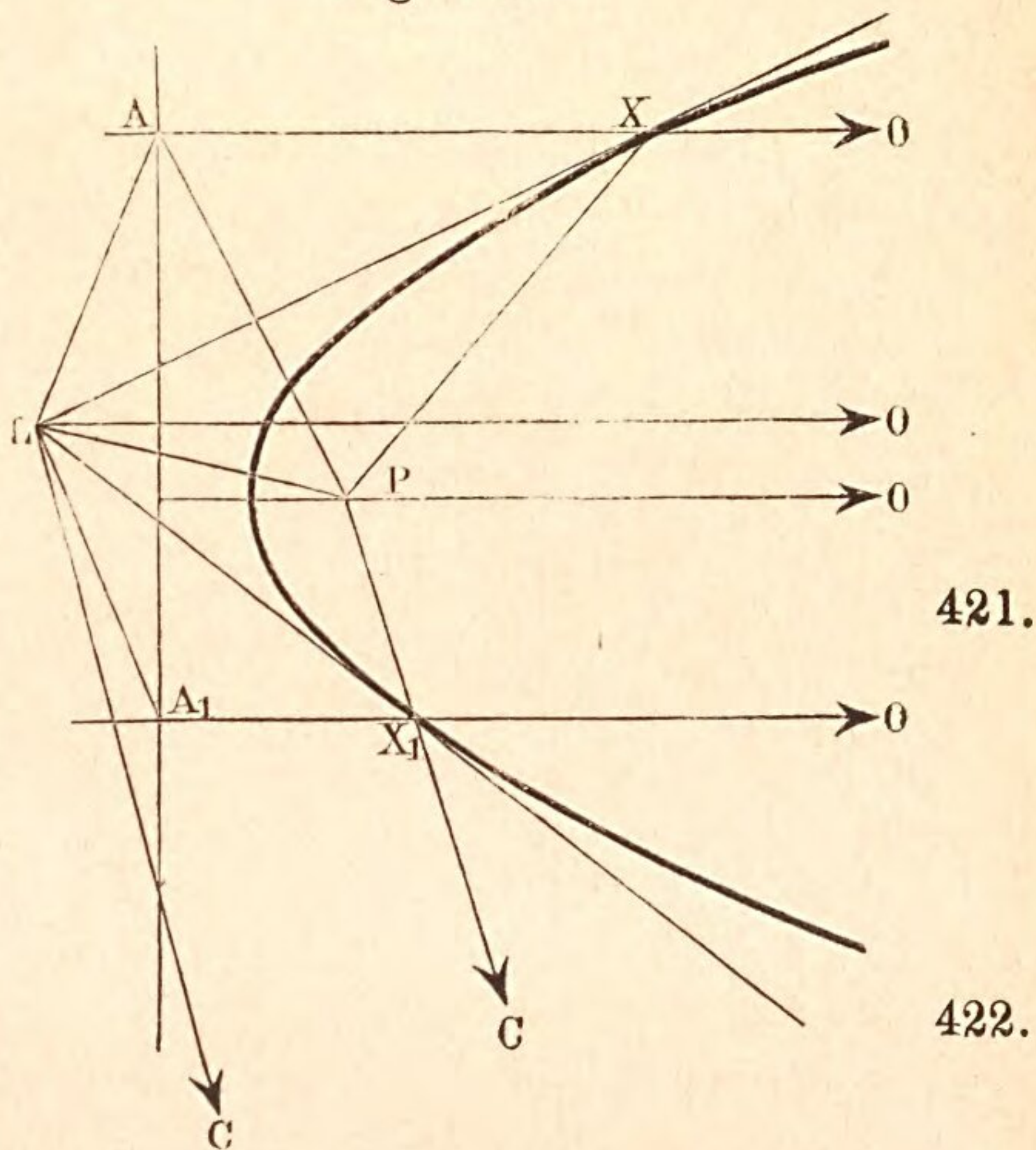
Gehen von einem Punkte zwei Tangenten an die Parabel, so bildet der Leitstrahl des Punktes gleiche Winkel mit den Leitstrahlen der Berührungspunkte. ( $LPX = LPX_1$ , Fig. 101.)

Specieller Fall. —  $X_1 PX = 2R$ . Dann ist  $LPX = LPX_1 = R$ , und  $CLP = R$ . Da nun  $PLX = O LX_1$ , oder, mit 2 multiplicirt,  $PLA = OLC$ , oder, durch Subtraction von  $OLP$ ,  $ALO = PLC$  ist, so folgt aus  $LPX_1 = R$ , dass auch  $PLC$  und  $ALO = R$  ist; d. h.: der Punkt  $L$  liegt wieder auf der Leitlinie, und man hat den Satz:

Die Berührungssehne\*) der von einem Punkte der 423. Leitlinie an die Parabel gezogenen Tangenten geht durch den Brennpunkt.

Anm. Hiernach gehen die beiden, an entsprechender Stelle bei der Ellipse und Hyperbel angenommenen speciellen Fälle für die Parabel in einen einzigen über. Und wenn wieder die aus dem zweiten dieser Fälle hervorgehende Gerade die Directrix der Parabel genannt wird, so kann man sagen, dass für die Parabel die Directrix mit der Leitlinie zusammenfällt. — Da der Punkt  $C$  der Leitpunkt von  $X_1$  in dem aus  $P$  beschriebenen Leitkreise ist, und da dieser Leitkreis ebenso wie der aus dem unendlich fernen Punkte  $O$  beschriebene eine Gerade sein muss, so kann

Fig. 101.



\*) Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet,



es nur die unendlich ferne Gerade sein, mithin ist  $C$  selbst der unendlich ferne Punkt der Geraden  $PX_1$ .

Die durch den Brennpunkt gehende, der Directrix parallele Sehne heisst der Parameter der Parabel.

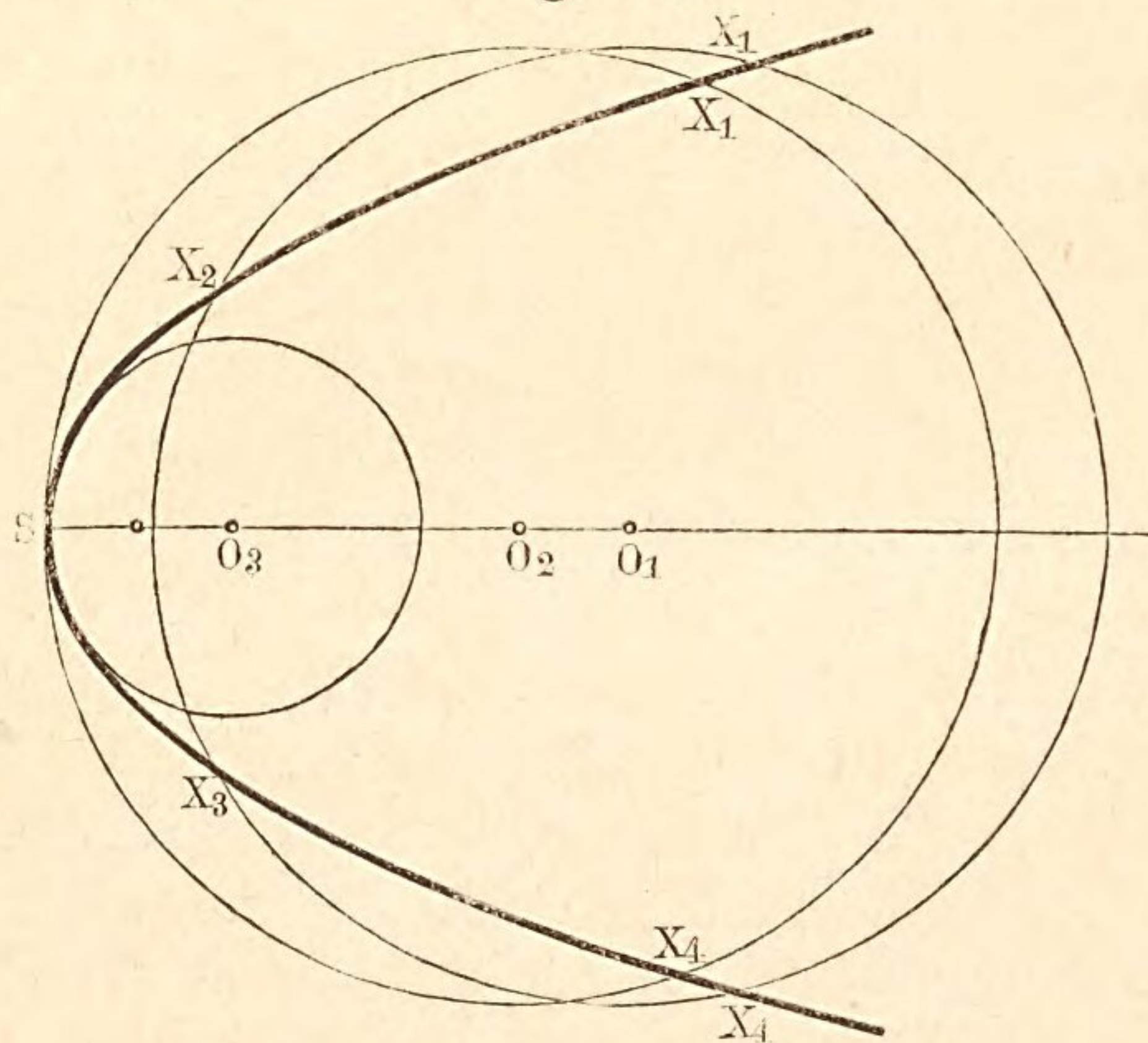
Aus dem Zusammenfallen der Directrix mit der Leitlinie folgt nach der Entstehung der Parabel der mit 390 analoge Satz:

424. Für jeden Punkt der Parabel sind die Entfernungen vom Brennpunkt und der Directrix einander gleich.

Anm. Welchen Satz über den geometrischen Ort von  $X$  (als Mittelpunkt einer Kreislinie) liefert die Umkehrung von 424?

180. *Krümmung und Krümmungskreis.* — Aus einem Punkte  $O_1$  der Axe sei mit dem Radius  $r$  eine Kreislinie beschrieben, welche die Parabel in den vier Punkten  $X_1, X_2, X_3, X_4$  schneidet. Bewegt sich diese Kreislinie so vorwärts, dass ihr Mittel-

Fig. 102.



punkt, auf der Axe fort-rückend, sich dem Scheitel  $S$  der Parabel nähert, so nähern sich auch die Schnittpunkte  $X_2$  und  $X_3$  dem Punkte  $S$ , und, da sie in Folge der Symmetrie der ganzen Figur zur Axe stets gleichweit von  $S$  entfernt sind, so fallen sie mit  $S$  zusammen, wenn  $O_2S = r$  ist. Dann also berührt die Kreislinie die Parabel im Punkte  $S$ , und schneidet sie ausserdem in zwei

neuen Punkten  $X_1$  und  $X_4$ . — Wenn von diesem Augenblicke an die Kreislinie, indem sie beständig die Parabel in  $S$  berührt, sich durch Verkleinerung ihres Radius zusammenzieht, so rückt ihr Mittelpunkt noch weiter an  $S$  heran. Die Punkte  $X_1$  und  $X_4$ , welche, wie  $X_2$  und  $X_3$ , stets gleichweit von  $S$  entfernt sind, nähern sich ebenfalls dem Punkte  $S$ , und fallen für einen gewissen Werth von  $r$ , der  $\varrho$  heissen möge ( $SO_3 = \varrho$ ), ebenfalls mit  $S$  zusammen.

Die Kreislinie, deren Radius  $\varrho$  ist, berührt also die Parabel in vier, in  $S$  zusammenfallenden Punkten. Verkleinert sich die Kreislinie noch weiter, so werden zwei dieser Punkte imaginär, die beiden anderen fallen nach wie vor im Berührungspunkte  $S$  zusammen.



Aus der Entstehung der Kreislinie  $O_3$  folgt, dass dieselbe unter allen, die Parabel in  $S$  berührenden Kreislinien sich am genauesten an diese Curve anschliesst. Man sagt daher, dass die Parabel im Punkte  $S$  dieselbe Krümmung habe wie die Kreislinie  $O_3$ , und versteht unter der Grösse der Krümmung einer Kreislinie den umgekehrten Werth ihres Radius  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ .

Eine Kreislinie hat in jedem ihrer Punkte gleich grosse Krümmung. Die Krümmung einer Geraden, welche als Kreislinie mit dem Radius  $\infty$  betrachtet werden kann, ist hiernach gleich  $\frac{1}{\infty}$  oder Null. — Die Strecke  $\rho$  heisst der Krümmungsradius der Parabel im Punkte  $S$ , die Kreislinie  $O_3$  der Krümmungskreis.

Construirt man in einem beliebigen Punkte  $X$  der Parabel die zur Tangente senkrechte Gerade, und lässt auf dieser, statt auf der Axe, den Mittelpunkt eines Schnittkreises sich bewegen, so fallen die beiden nächsten Schnittpunkte wieder gleichzeitig in einen Berührungspunkt zusammen. Verkleinert man dann den Radius des Berührungskreises, wie vorher, so fällt nur einer der noch übrigen beiden Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte zusammen, nicht aber beide. Man erhält also eine Kreislinie, welche die Parabel in drei zusammenfallenden Punkten berührt und ausserdem in einem Punkte schneidet. Diese Kreislinie heisst der Krümmungskreis des Punktes  $X$ , und der umgekehrte Werth ihres Radius die Krümmung der Parabel im Punkte  $X$ .

Diese Betrachtungen lassen sich für die Ellipse und Hyperbel (wie für Curven im Allgemeinen) ebenso anstellen, wie für die Parabel. Man sagt, dass zwei Curven in einem Punkte eine Berührung  $(n - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung haben, wenn sie  $n$  in diesem Punkte zusammenfallende Punkte gemeinsam haben. Demnach hat der Krümmungskreis im Scheitel der Parabel eine Berührung dritter, in jedem anderen Punkte der Parabel eine solche zweiter Ordnung mit dieser Curve. Die gewöhnliche zweipunktige Berührung ist eine Berührung erster Ordnung.

Anm. In der Nähe des Endpunktes der grossen Axe unterscheidet sich die vierpunktig berührende Ellipse so wenig von der Parabel, dass bei der Berechnung von sehr langgestreckten Kometenbahnen aus dem in der Nähe jenes Punktes beobachteten Stücke eine parabolische Bahn, statt einer elliptischen, sich ergibt. — Aus der Eigenschaft des Krümmungskreises im Scheitel der Parabel folgt, dass ein sphärischer Hohlspiegel einen parabolischen vertreten kann.



# Uebungssätze und Aufgaben.

## V o r b e m e r k u n g.

### Uebersicht der wichtigsten Methoden zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben.

a) Die Methode der geometrischen Oerter. — Hängt die Lösung einer Aufgabe von der Bestimmung eines Punktes ab, so lassen sich oft aus den gegebenen Stücken zwei geometrische Oerter für diesen Punkt construiren, wodurch er bestimmt ist. (Sätze über geometrische Oerter: 86, 87, 120, 122, 167—170, 192—197, 236, 237, 255, 263, 267, 295, 365, 367 etc.)

b) Die analytische Methode. — Man stellt eine vorläufige Zeichnung von der gegenseitigen Lage der gegebenen und der gesuchten Stücke her. Findet es sich dann, dass die Lösung der Aufgabe von der Bestimmung eines einzigen Stückes  $x$  abhängt, so führt der zwischen  $x$  und den bekannten Stücken entweder schon bestehende, oder durch eine Hilfslinie herzustellende Zusammenhang auf ein andres unbekanntes Stück  $y$ , der Art, dass, wenn  $y$  gefunden wäre, die Construction von  $x$  nach einem bekannten geometrischen Satze (oder einer schon bekannten Aufgabe) sofort ausführbar wäre. Von  $y$  gelangt man auf demselben Wege zu einem Stück  $z$ , u. s. w., bis schliesslich ein Stück  $u$  erreicht wird, von welchem sofort zu erkennen ist, dass man es unmittelbar aus den gegebenen Stücken construiren kann. Hiermit ist die „Analysis“ der Aufgabe beendet, und die Lösung besteht nun darin, dass man nach einander (den Weg der Analysis rückwärts verfolgend)  $u, \dots z, y, x$  construirt. — Die Schwierigkeit dieser Methode besteht in der richtigen Auswahl der sich darbietenden Beziehungen und der möglichen Hilfslinien.

c) Die Methode der Aehnlichkeit. — Verlangt die Aufgabe die Construction einer Figur aus gegebenen Stücken (Bedingungen), so reichen mitunter die übrigen Stücke, mit



Ausnahme eines einzigen, zur Bestimmung der Gestalt der gesuchten Figur aus. Man kann dann aus diesen Stücken eine der gesuchten ähnliche Figur construiren, und zwar in beliebiger oder in ähnlicher Lage, je nachdem die gesuchte Figur beliebige oder bestimmte Lage haben soll. Aus der Hilfsfigur lässt sich dann die gesuchte in ähnlicher Lage construiren.

d) Die Methode der Umkehrung. — Soll eine Figur  $x$  in bestimmter Lage zu einer gegebenen Figur  $a$  gezeichnet werden, so zeigt die nach b) ausgeführte vorläufige Zeichnung mitunter, dass die umgekehrte Aufgabe,  $a$  in Zusammenhang mit einer gegebenen Figur  $x$  zu zeichnen, leicht lösbar ist. Kann man nun aus den Bedingungen der Aufgabe eine mit  $x$  ähnliche Figur  $x_1$  zeichnen, so construirt man die zugehörige Figur  $a_1$ , und vervollständigt die Figur  $a$  zu einer Figur  $(ax)$ , welche mit  $(a_1x_1)$  ähnlich ist.

e) Die Methode der Drehung. — Handelt es sich, wie in d), um den Zusammenhang einer gegebenen und einer gesuchten Figur, so kann man mitunter in der vorläufigen Zeichnung die letztere durch eine Drehung von bestimmter Grösse in eine Stellung bringen, in welcher sie leicht zu construiren ist.

f) Die algebraische Methode. — Lässt sich die Lösung einer Aufgabe auf die Bestimmung einer oder mehrerer unbekannter durch bekannte Strecken zurückführen (durch die letzteren müssen die gegebenen Stücke oder Bedingungen vollständig ersetzt werden!), so kann man zwischen allen diesen Strecken ebensoviele (aus Sätzen der Aehnlichkeitslehre oder der rechnenden Geometrie zu entnehmende) Gleichungen aufstellen, als Unbekannte vorhanden sind, dann die letzteren algebraisch bestimmen, und schliesslich construiren. — In der Allgemeinheit ihrer Anwendbarkeit steht diese Methode auf gleicher Stufe mit b). Oft lässt sich eine Aufgabe nach beiden Methoden lösen. Dann ist die Lösung nach b) gewöhnlich in der Construction einfacher, aber schwieriger zu finden, als die nach f).

In der folgenden Aufgabensammlung giebt die Randnummer sowohl bei den zu lösenden Aufgaben, wie bei den abzuleitenden Sätzen denjenigen Satz des Buches an, auf welchem vorzugsweise die Lösung, bzw. Ableitung beruht. Weitere Sätze sind zur Erleichterung in einzelnen Fällen hinter der Aufgabe angegeben. Die Nummern, vor welchen ein A steht, verweisen auf eine frühere Aufgabe.



### A. Systematisch geordnete Sätze und Aufgaben.

- Aus gegebenen Strecken  $a, b, c$  eine Strecke  $x$  zu
15. zeichnen unter der Bedingung: 1)  $x = a + b$ , 2)  $x = a + b + c$ , 3)  $x = 2a$ , 4)  $x = 3a$  etc.
  16. 5)  $x = a - b$ , 6)  $x = a + b - c$ , 7)  $x = a - b + c$ , 8)  $x = a - b - c$ .
- Wenn  $O$  der Mittelpunkt,  $r$  der Radius,  $A, B$  Punkte der Kreislinie sind, eine Kreislinie zu zeichnen aus den gegebenen Stücken 9)  $O, r$ , 10)  $A, r$ . — In einer gegebenen Kreislinie 11) den Radius, 12) den Durchmesser zeichnen, der (oder dessen Verlängerung) durch einen gegebenen Punkt  $P$  geht, 13) durch zwei gegebene Punkte  $A, B$  die Sehne zu ziehen, 14) eine gegebene Strecke  $a$  aus einem gegebenen Punkte  $A$  als Sehne einzutragen.
56. 15. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht. — 16. Jede durch den Scheitel eines rechten Winkels ausserhalb desselben gezogene Gerade bildet mit den Schenkeln Winkel, deren Summe gleich  $R$  ist.
  59. 17. Die im Scheitel eines Winkels auf den Schenkeln nach aussen errichteten Senkrechten bilden einen Winkel, welcher mit dem gegebenen zusammen  $2R$  beträgt.
  66. 18. Die Halbierungslinien zweier correspondirender oder Wechselwinkel sind parallel.
  71. 19. Sind zwei verschränkte oder Gegenwinkel gleich, so steht die schneidende Gerade zu den Parallelen senkrecht.
  76. 20. Die Halbierungslinien zweier verschränkten oder Gegenwinkel stehen auf einander senkrecht. — 21. Ist im Dreieck  $\alpha + \beta = \gamma$ , so ist  $\gamma = R$ .
  78. 22. Der Winkel der Senkrechten, welche von einem Punkte auf zwei sich schneidende Geraden gefällt werden, ist gleich einem der Winkel, welche die Geraden bilden. — 23. Die Senkrechte, welche im rechtwinkligen Dreieck aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite gefällt wird, theilt das Dreieck in zwei neue Dreiecke, deren Winkel denen des ersten gleich sind.
  83. 24. Die Summe der fünf spitzen Winkel eines Stern-Fünfecks (vgl. das Stern-Siebeneck Fig. 27) beträgt  $2R$ .
  84. 25. Der Winkel der Senkrechten, welche von einem Punkte zwischen den Schenkeln eines Winkels auf die Schenkel gefällt werden, beträgt mit dem gegebenen Winkel zusammen  $2R$ . — 26. Die Halbierungslinien der vier Aussenwinkel eines Vierecks



bilden ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen  $2R$  betragen.

Ein Dreieck zu construiren aus den gegebenen Stücken: 94. 27)  $a, b, c$ , 28)  $a, a, b$ , 29)  $a, a, a$ , 30)  $a, b, \gamma$ , 31)  $a, \beta, \gamma$ , 32)  $a, \beta, \alpha$  (77), 33) congruent zu einem gegebenen Dreieck. — 34) Einen Winkel construiren, welcher  $n$ -mal so gross ist als ein gegebener. — Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche 35) eine geg. Gerade unter einem geg. Winkel schneidet (65), 36) von den Schenkeln eines geg. Winkels gleiche Stücke abschneidet.

37. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Aussen- 98. winkel an der Basis einander gleich. — 38. Im gleichsch. D. sind durch einen Winkel die übrigen bestimmt (Rechnungsbeispiele!). — 39. Ist in zwei gleichsch. D. der Winkel an der Spitze, oder ein Basiswinkel gleich, so sind auch die anderen Winkel gleich. — 40. Im gleichsch.-rechtwinkligen D. ist jeder spitze Winkel gleich  $\frac{1}{2}R$ . — 41. Im gleichsch. D. schneidet eine zu einer Seite gezogene Parallele ein neues gleichsch. D. ab. — 42. Verlängert man einen Schenkel des gleichsch. D. über die Basis um eine beliebige Strecke, und trägt auf dem andern Schenkel von der Basis aus die gleiche Strecke ab, so wird die Basis durch die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken halbirt. — 43. Ist im gleichsch. D. ein Basiswinkel doppelt so gross als der Winkel an der Spitze, so theilt die Halbierungslinie des Basiswinkels das Dreieck in zwei gleichsch. D. — 44. Verlängert man jede von zwei Seiten eines Dreiecks über den gemeinsamen Endpunkt um die andere, so sind die Geraden, welche die Endpunkte dieser Verlängerungen mit denen der dritten Seite verbinden, einander parallel.

45) Durch einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die Centriwinkel der abgeschnittenen Bogen gleich sind (70).

46. Der Winkel, welchen die Basis eines gleichsch. D. 99. mit der auf einen Schenkel gefällten Höhe bildet, ist gleich dem halben Winkel an der Spitze. — 47. Ist in einem Dreieck die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte dieser Seite, so ist der Winkel an jener Ecke gleich  $R$ .

48. Bildet eine von der Spitze eines gleichsch. D. nach 100. der Basis gezogene Strecke mit letzterer einen Winkel von  $\frac{2}{3}R$ , so ist diese Strecke gleich der Summe (oder Differenz) aus den Abschnitten der Basis. — 49. Ist in einem recht-



winkligen Dreieck ein spitzer Winkel doppelt so gross als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so gross als die kleinere Kathete. — 50. Trägt man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Ecken aus drei gleiche Strecken ab, und verbindet die Endpunkte derselben, so entsteht ein neues gleichseitiges Dreieck. — 51. Ist in A. 50 die abgetragene Strecke gleich  $\frac{1}{3}$  der Seite, so stehen die Seiten des einen Dreiecks auf denen des andern senkrecht (A. 49).

52) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein zweites so zu zeichnen, dass die Seiten des einen auf denen des andern senkrecht stehen. — 53) Einen rechten Winkel in 3 gleiche Theile zu theilen. — 54) Durch vier gegebene Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, drei Geraden zu ziehen, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden.

101. 55. Die Halbirungslinie des Aussenwinkels an der Spitze eines gleichsch. D. ist der Basis parallel. — 56. Liegen auf den Schenkeln eines Winkels  $O$  die Punktreihen  $A, B, C, \dots$  und  $A_1, B_1, C_1, \dots$  so, dass  $OA = AA_1 = A_1B = BB_1 = B_1C = CC_1, \dots$  ist, so ist, wenn  $\angle AOA_1 = \alpha$  gesetzt wird,  $\angle A_1AB = 2\alpha$ ,  $\angle BA_1B_1 = 3\alpha$ ,  $\angle B_1BC = 4\alpha$ , etc. — 57. Verlängert man einen Schenkel des gleichsch. D. über die Spitze hinaus um sich selbst, und verbindet den Endpunkt der Verlängerung mit dem der Basis, so steht diese Linie auf der Basis senkrecht (vgl. A. 49). — 58. Verlängert man eine Seite ( $a$ ) eines Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um die dort anstossende Seite und verbindet die Endpunkte mit der dritten Ecke, so ist der Winkel der Verbindungslinien gleich  $R \pm \frac{1}{2}\alpha$ . — 59. Trägt man auf einer Seite ( $a$ ) eines Dreiecks eine andere Seite ( $b$ ) ab (an) und verbindet den Endpunkt mit der Spitze, so bildet diese Linie mit der dritten Seite den Winkel  $\pm \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ,  $[R \pm \frac{1}{2}(\beta - \gamma)]$ .

60) Die Senkrechte im Endpunkt einer Strecke zu errichten, ohne die Strecke zu verlängern.

106. Im gleichschenkligen Dreieck sind die nach den Schenkeln gehenden 61. Höhen, 62. Mittellinien, 63. die Halbirungslinien der Basiswinkel, 64. die Strecken, welche die Endpunkte der Basis mit zwei gleichweit von ihnen entfernten Punkten der Schenkel verbinden, einander gleich. — 65. Die aus zwei Ecken eines Dreiecks auf die zwischen ihnen liegende Mittellinie gefällten Senkrechten sind einander gleich. — 66. Betragen die Winkel an der Spitze in zwei gleichsch. D. zusammen  $2R$ , so betragen zwei ihrer Basiswinkel zusammen  $1R$ . — 67. Der



Winkel, welchen in einem Dreieck die Halbirungslinie des Winkels  $\alpha$  mit der aus derselben Ecke gefällten Höhe bildet, ist  $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ .

68) Zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen, so dass die Summe der von zwei gegebenen Punkten auf dieselbe gefällten Senkrechten gleich einer gegebenen Strecke ist. — 69) Auf einer geg. Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit zwei gegebenen Punkten gleiche Winkel mit der Geraden bilden (99). — 70) In einem gegebenen Dreieck zu einer Seite diejenige Parallele zu ziehen, welche gleich der Summe (Differenz) der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist. — Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen aus\*) 71)  $h_1$ , 72)  $a + h_1$ , 73)  $a - h_1$ . — Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus 74)  $a + b, c$ , 75)  $a - b, c$ , 76)  $a + b, \alpha$ , 77)  $a - b, \alpha$ , 78)  $a + c, b$ , 79)  $a + c, \alpha$ , 80)  $c - a, b$ , 81)  $c - a, \alpha$ , 82)  $c, \alpha - \beta$ , 83)  $p, \alpha$ , 84)  $p, \alpha - \beta$ , 85)  $p_3, \alpha$ , 86)  $a + h_3, \alpha$ , 87)  $a - h_3, \alpha$ , 88)  $p, \alpha = 2\beta$ . — Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus 89)  $\alpha, h_2$ , 90)  $b + h_1, \alpha$ , 91)  $b - h_1, \alpha$ , 92)  $b + h_2, \beta$ , 93)  $b - h_2, \beta$ , 94)  $a + b, \alpha$ , 95)  $a - b, \alpha$ , 96)  $a, t_2$ , 97)  $b, t_2$ , 98)  $p, h_1$ , 99)  $p, \alpha$ . — Ein schiefwinkliges Dreieck zu zeichnen aus 100)  $a, b + c, \alpha$ , 101)  $b + c, \alpha, \beta$ , 102)  $b - a, c, \alpha$ , 103)  $b - a, c, \gamma$ , 104)  $a + b, \beta - \alpha, \gamma$ , 105)  $p, \alpha, \beta$ , 106)  $p, \alpha - \beta, \gamma$ , 107)  $p_2, \alpha, \beta$ , 108)  $a, \beta, m_2$ , 109)  $a, b - c, \beta - \gamma$ . — 110) Ein Viereck zu zeichnen aus einer Seite, der Summe der anderen Seiten und den Winkeln.

111. In jedem Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner 108. als der Umfang. — 112. Im schiefwinkligen Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner als die der Mittellinien.

113. Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Dreiecks 110. mit den Ecken, so ist die Summe der Verbindungsstrecken kleiner als der ganze, und grösser als der halbe Umfang des Dreiecks. — 114. In jedem Viereck ist die Summe zweier Gegenseiten kleiner als die der Diagonalen. — 115. Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Sechsecks mit allen Ecken, so ist die Summe der Verbindungslinien grösser als die von drei nicht anstossenden Seiten. — 116. Jede Seite eines Dreiecks

---

\*) Bezeichnungen im Dreieck:  $abc$  Seiten,  $\alpha\beta\gamma$  Winkel,  $h_1h_2h_3$  Höhen,  $t_1t_2t_3$  Mittellinien,  $m_1m_2m_3$  Winkelhalbirende,  $r$  Radius des Umkreises,  $\rho$  Radius des Inkreises,  $\rho_1\rho_2\rho_3$  Radien der Ankreise,  $2p = a + b + c$ ,  $2p_1 = -a + b + c$ ,  $2p_2 = a - b + c$ ,  $2p_3 = a + b - c$ ,  $f^2$  Fläche. Im rechtwinkligen D. ist  $\gamma = R$ , im gleichschenkligen  $b = c$ .



- (Polygons) ist kleiner als der halbe Umfang. — 117. Liegen die Ecken eines Dreiecks auf den Seiten eines zweiten, so ist der Umfang des ersten kleiner als der des zweiten.
119. 118) In ein gegebenes Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck von gegebener Höhe so einzuzichnen, dass die Basis des letzteren einer Seite des ersteren parallel ist. — 119) Die Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden zu construiren, ohne die Geraden bis zu ihrem Schnittpunkte zu verlängern.
120. 120) Auf einer geg. Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten gleichweit entfernt ist. — 121) Einen Punkt zu finden, der von drei geg. Punkten gleichweit entfernt ist.
122. 122) Auf einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu finden, der von den beiden anderen Seiten gleichweit entfernt ist. — 123) Den Drehpunkt eines Spieltisches zu bestimmen (Punkt, um welchen man ein aus zwei congruenten Quadraten bestehendes Rechteck drehen muss, damit nach einer viertel Umdrehung die längere Seite in die Lage und Richtung der kürzeren komme).
126. 124. Schneidet man auf den Seiten eines Parallelogramms von den Ecken aus vier gleiche Stücke ab, und verbindet die Endpunkte der Reihe nach, so entsteht ein neues Parallelogramm. — 125. Verbindet man die Halbierungspunkte zweier Gegenseiten eines Parallelogramms mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird dadurch die andere Diagonale in drei gleiche Theile getheilt. — 126. Zieht man in einem gleichsch. D. aus einem Punkte der Basis Parallelen zu den Schenkeln, so ist die Summe derselben gleich einem Schenkel. — 127. Fällt man in einem gleichsch. D. aus einem Punkte der Basis Senkrecht auf die Schenkel, so ist die Summe derselben gleich einer zum Schenkel gehörigen Höhe. — 128. Fällt man aus einem beliebigen Punkte innerhalb eines gleichseitigen D. Senkrecht auf die drei Seiten, so ist ihre Summe gleich der Höhe des Dreiecks.
- Eine gegebene Strecke zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels so einzutragen, dass sie 129) auf einem Schenkel senkrecht steht, 130) von beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneidet, 131) einer gegebenen Geraden parallel ist. — 132) Zwischen zwei gegebene Parallelen eine gegebene Strecke so einzutragen, dass sie durch einen gegebenen Punkt geht. — 133) Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, dass sie von den beiden anderen Punkten gleich-



weit entfernt ist. — 134) Von zwei gegebenen gleichwinkligen Dreiecken das kleinere so in das grössere zu zeichnen, dass die Seiten des inneren von denen des äusseren gleichen Abstand haben (122). — 135) Ein Viereck zu zeichnen, von welchem drei Seiten und die Winkel an der vierten gegeben sind.

Im gleichschenkligen Trapez sind 136. je zwei an 127. einer der parallelen Seiten liegende Winkel einander gleich, 137. die Diagonalen einander gleich. — Ein Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez, wenn 138. die Diagonalen und zwei Gegenseiten gleich, 139. die Diagonalen gleich und zwei Gegenseiten parallel, 140. die anliegenden Winkel einer Seite sowie die ihrer Gegenseite einander gleich sind. — 141. Die Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten (die Mittellinie) eines gleichschenkligen Trapezes ist gleich der halben Summe, und das zwischen den Diagonalen liegende Stück dieser Linie gleich der halben Differenz der parallelen Seiten. — 142. Die Mitten der Seiten jedes Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms.

143) Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels diejenige Strecke zu ziehen, welche in diesem Punkte halbiert wird. — Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben sind 144) die Mitten der drei Seiten, 145) die Mitten zweier Seiten und der Fusspunkt irgend einer Höhe. — 146) Ein Fünfeck zu zeichnen, wenn die Mitten seiner Seiten gegeben sind (A. 142). — 147) Ein Viereck zu zeichnen, wenn gegeben sind seine Seiten und die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Gegenseiten (A. 142).

148. Construiert man aus den Stücken eines gegebenen 128. Dreiecks ein rechtwinkliges Dreieck so, dass die Hypotenuse gleich  $a \pm b$  und ein Winkel gleich  $\gamma$  ist, so ist die dem Winkel  $\gamma$  gegenüberliegende Kathete gleich  $h_2 \pm h_1$ .

Ein Parallelogramm zu zeichnen aus \*) 149)  $a, b, \gamma$ , 150)  $a, b, c$ , 151)  $a, c, \gamma$ , 152)  $a, b, h_1$ , 153)  $c, h_1, \gamma$ . 154) Ein gleichsch. D. zu zeichnen aus  $a, h_1 \pm h_2$  (A. 148).

155. Die Mitten der Seiten eines gleichschenkligen Trapezes 129. sind die Ecken eines Rhombus.

Einen Rhombus zu zeichnen aus 156)  $a, \gamma$ , 157)  $a, c$ , 158)  $a, h_1$ .

159. Die Halbierungslinien der Winkel eines Parallelo- 130.

\*) Bezeichnungen im Parallelogramm:  $ab$  Seiten,  $\gamma$  Winkel,  $h_1 h_2$  Höhen,  $cd$  Diagonalen,  $\delta$  Winkel der Diagonalen.



gramms schliessen ein Rechteck ein. — 160. Die Mitten der Seiten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks (A. 66). — 161. Die Mitten der Seiten eines Rechtecks sind die Ecken eines Rhombus (105). — 162. Schneidet man auf der Diagonale  $AC$  eines Quadrates  $ABCD$  eine Seite bis  $E$  ab, sodass  $AB = AE$ , und errichtet in  $E$  auf der Diagonale die Senkrechte, welche  $BC$  in  $F$  schneidet, so ist  $BF = FE = EC$ .

Ein Rechteck zu zeichnen aus 163)  $a, b$ , 164)  $a, c$ ; ein Quadrat aus 165)  $a$ . — 166) In ein gegebenes Quadrat ein zweites so zu zeichnen, dass eine Ecke des letzteren in einem auf einer Seite des ersteren gegebenen Punkte liegt.

131. 167. Zieht man durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so sind diejenigen der neuen Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, inhaltsgleich. — 168. Verbindet man einen beliebigen Punkt innerhalb eines Parallelogramms mit den Ecken, so sind die Summen der nicht benachbarten Dreiecke einander gleich. — 169. Von den beiden Diagonalen eines Parallelogramms ist diejenige die längere, welche die Scheitel der spitzen Winkel verbindet. — 170. Die durch die Ecken eines Vierecks zu den Diagonalen gezogenen Parallelen bilden ein Parallelogramm, dessen Fläche doppelt so gross ist als die des Vierecks.

133. Ein Dreieck zu zeichnen aus 171)  $b, c, t_1$ , 172)  $\alpha, t_1, h_1$ , 173)  $\alpha, h_1, t_2$ . — Ein Parallelogramm zu zeichnen aus 174)  $a, c, d$ , 175)  $c, d, \delta$ , 176)  $a, c, \delta$ , 177)  $c, d, h_1$ . — 178) Drei gegebene Strecken von einem Punkt aus so zu legen, dass ihre Endpunkte ( $B, C, D$ ) in gerader Linie liegen, und  $BC = CD$  ist.

134. 179) In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm zu zeichnen, von welchem der Schnittpunkt der Diagonalen gegeben ist. — 180) Durch die Ecken eines geg. Vierecks ein Parallelogramm zu legen, dessen Mittelpunkt ein im Innern des Vierecks gegebener Punkt ist. — 181) Innerhalb eines Rechtecks  $\overline{ABCD}$  sind zwei Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben. Man soll auf  $AB, BC, CD$  die Punkte  $A_1, B_1, C_1$  so bestimmen, dass  $PA_1A = B_1A_1B, A_1B_1B = C_1B_1C, B_1C_1C = QC_1D$  ist. (Anwendung auf den Weg einer Welle, die von den Wänden eines rechteckigen Raums zurückgeworfen wird, sowie auf die Theorie des Billards.)

135. 182) Ein Parallelogramm zu zeichnen, dessen Mittelpunkt gegeben ist, und dessen Ecken auf den Seitenlinien eines geg. Vierecks liegen (A. 143).



Ein Parallelogramm ist ein Rhombus, wenn 183. die 136. Diagonalen auf einander senkrecht stehen, 184. eine Diagonale einen Winkel halbirt. — 185. Die Fusspunkte der vom Schnittpunkt der Diagonalen eines Rhombus auf die Seiten gefällten Senkrechten sind die Ecken eines Rechtecks.

Einen Rhombus zu zeichnen aus 186)  $\gamma, c$ , 187)  $c, d$ , 188)  $a, c \pm d$ , 189)  $\gamma, c \pm d$ . — In ein geg. Dreieck einen Rhombus zu zeichnen, sodass 190) derselbe einen Winkel mit dem Dreieck gemeinsam hat, 191) eine Seite des Rhombus in eine Seite des Dreiecks und eine Ecke in einen auf einer andern Seite des Dreiecks gegebenen Punkt fällt.

**192.** Ein Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn die 137. Diagonalen einander gleich sind. — 193. Werden die Seitenlinien eines Quadrates durch zwei auf einander senkrechte Geraden geschnitten, so ist das von zwei Gegenseiten auf der ersten Geraden abgeschnittene Stück gleich dem von den andern Gegenseiten auf der zweiten Geraden abgeschnittenen Stücke. — 194. Stehen zwei gleich lange Strecken senkrecht auf einander, so ist jedes Rechteck, dessen Seiten durch ihre vier Endpunkte gehen, ein Quadrat.

Ein Quadrat zu zeichnen aus 195)  $c$ , 196)  $c \pm a$ ; dgl. ein Rechteck aus 197)  $a, \delta$ , 198)  $c, \delta$ . — 199) In ein geg. Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, so dass eine Ecke des Dreiecks mit einer Ecke des Quadrats zusammenfällt. — 200) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten durch die Ecken eines gegebenen Vierecks gehen (A. 194).

Ein Parallelogramm in ein andres verwandeln 201) 140. mit gleicher Grundlinie und gegebenem Winkel, 202) mit gleicher Grundlinie und gegebener Seite (3 Fälle), 203) mit gleichem Winkel und gegebener Seite (A. 202, 201), 204) mit gegebenem Winkel und gegebener Seite (A. 202, 201). — 205) Ein Parallelogramm durch Parallelen zu einer Seite in  $n$  gleiche Theile zu theilen.

**206.** Wenn die eine Diagonale eines Vierecks die andere 142. halbirt, so halbirt sie auch die Fläche des Vierecks. — 207. Die oberen Abschnitte der Mittellinien eines Dreiecks theilen dasselbe in drei flächengleiche Dreiecke.

Ein Dreieck in ein anderes verwandeln 208) mit gleicher Grundlinie und gegebenem anliegenden Winkel, 209) mit gleicher Grundlinie und gegebener Seite (3 Fälle), 210) mit geg. Seite und geg. anliegendem Winkel (A. 209, 208), 211) mit gleicher Grdl., sodass eine Seitenlinie durch einen geg. Punkt



- geht, 212) mit gleicher Grdl., sodass die Spitze auf einer geg. Geraden liegt, 213) mit gleichem Winkel und geg. Grundlinie oder Höhe, 214) mit geg. Spitze, so dass die Grundlinie mit der des geg. Dreiecks in derselben Geraden liegt und einen Endpunkt gemeinsam hat (A. 213). — 215) Ein Polygon in ein andres zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat. — 216) Ein Parallelogramm in einen Rhombus (mit Beibehaltung einer Diagonale) zu verwandeln. — 217) Ein Dreieck  $\overline{ABC}$  in ein andres  $\overline{A_1B_1C_1}$  zu verwandeln, so dass  $C_1$  ein auf  $AB$  gegebener Punkt ist, und  $A_1B_1$  auf einer durch  $C$  gehenden geg. Geraden liegt. — 218) Dgl., so dass  $A_1$  mit  $A$  zusammenfällt und  $B_1C_1$  auf einer beliebig geg. Geraden liegt. — 219) Ein Dreieck, 220) ein Parallelogramm durch Linien, die von einer Ecke ausgehen, in  $n$  gleiche Theile zu theilen; 221) dgl. ein Dreieck durch Linien, die von einem geg. Punkt einer Seite ausgehen. — 222) Innerhalb eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  ist ein Punkt  $P$  gegeben. Man soll auf  $BC$  einen Punkt  $X$  so bestimmen, dass die Strecken  $PA$  und  $PX$  die Fläche des Dreiecks halbiren (A. 219, 214). — Ein Viereck zu halbiren durch eine 223) von einer Ecke, 224) von einem geg. Punkte einer Seite ausgehende Gerade (A. 219). — 225) Durch zwei auf den Seiten eines Dreiecks geg. Punkte zwei Strecken zu ziehen, welche die Fläche des Dreiecks in drei gleiche Theile theilen (A. 221).
144. Ein Dreieck in  $n$  Theile zu theilen, die ein gegebenes Verhältniss haben, durch Linien, welche ausgehen 226) von einer Ecke, 227) von einem auf einer Seite, 228) von einem innerhalb, 229) ausserhalb des Dreiecks gegebenen Punkte.
154. **230.** Unter allen Strecken, die von einem Punkte nach einer Kreislinie gezogen werden können, ist diejenige die längste, welche durch den Mittelpunkt, und diejenige die kürzeste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht (109).
- 158 **231.** Die Geraden, welche durch den Mittelpunkt einer Kreislinie und die Schnittpunkte der einen von zwei parallelen Secanten gezogen werden, schneiden auf der anderen von den Schnittpunkten aus gleiche Stücke ab. — 232. Die Mitten aller parallelen Sehnen liegen auf einem Durchmesser. — 233. Geht eine Kreislinie durch den Mittelpunkt einer zweiten, und zieht man parallel zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte eine gemeinsame Secante, so ist die Summe der äusseren beiden Abschnitte derselben gleich dem Durchmesser der ersten Kreislinie.



**234)** Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die entstehenden Sehnen einander gleich sind.

**235.** Fällt man aus den Endpunkten eines Durchmessers 162. Senkrechten auf eine Secante, so haben die Endpunkte der Sehne gleichen Abstand von den Fusspunkten der Senkrechten.

**236.** Die Mitten aller gleich langen Sehnen einer Kreis- 163. linie liegen auf einer Kreislinie. (Wie findet man den Radius derselben?) — **237.** Construiert man aus beliebigen Punkten der einen von zwei Parallelen Kreislinien mit demselben Radius, so sind die auf der anderen entstehenden Sehnen einander gleich.

**238)** Mit gegebenem Radius eine Kreislinie zu zeichnen, welche jede von zwei gegebenen Geraden unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

**239.** Der Winkel zweier Sehnen ist gleich der Summe der 164. Peripheriewinkel, welche auf seinem und seines Scheitelwinkels Bogen stehen.

**240.** Liegen die Ecken eines Dreiecks auf einer Kreis- 165. linie, so ist die Summe (Differenz) aus einem spitzen (stumpfen) Dreieckswinkel, und dem Winkel, welchen die gegenüberliegende Seite mit dem durch einen ihrer Endpunkte gehenden Durchmesser bildet, gleich  $R$ . — **241.** Ist im rechtwinkligen Dreieck eine Kathete halb so gross als die Hypotenuse, so ist ihr Gegenwinkel halb so gross als der der anderen. — **242.** Zieht man aus dem einen Schnittpunkte zweier Kreislinien die Durchmesser, so liegen deren Endpunkte mit dem anderen Schnittpunkt in gerader Linie.

**243.** Zwischen parallelen Sehnen eines Kreises liegen 166. gleiche Bogen. — **244.** Stehen zwei Sehnen senkrecht auf einander, so ist die Summe je zweier nicht benachbarter Bogen gleich einem Halbkreise. — **245.** Verbindet man einen Punkt innerhalb (ausserhalb) der Kreisfläche mit den Endpunkten einer Sehne, so ist der Winkel der Verbindungslinien grösser (kleiner) als der mit dem Punkt auf derselben Seite der Sehne liegende, zu ihr gehörige Peripheriewinkel. — **246.** Parallele aus den Endpunkten eines Durchmessers gezogene Sehnen sind gleich, und ihre Endpunkte liegen mit dem Mittelpunkt in gerader Linie. — **247.** Fällt man von zwei Punkten eines Bogens, die gleichen Abstand von seinen Endpunkten haben, Senkrechten auf die zugehörige Sehne, so sind dieselben einander gleich. — **248.** Liegen die Ecken eines Dreiecks auf



einer Kreislinie, so schneidet jede Mittelsenkrechte die Halbierungslinien des gegenüberliegenden Winkels und seines Aussenwinkels in einem Punkte der Kreislinie. — 249. Liegen die Ecken eines Sechsecks  $(\overline{a_1 a_2 \dots a_6})$ , in welchem  $a_1 \parallel a_4$  und  $a_2 \parallel a_5$  ist, auf einer Kreislinie, so ist auch  $a_3 \parallel a_6$ . — 250. Verbindet man einen Punkt der Kreislinie mit den auf ihr liegenden Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die mittlere Verbindungslinie gleich der Summe der beiden anderen. — 251. Bilden zwei Sehnen, die aus den Endpunkten einer dritten nach Punkten desselben Bogens gezogen sind, gleiche Winkel mit jener, so sind sie einander gleich. — 252. Zwei Sehnen (Secanten), welche sich so schneiden, dass ein Abschnitt der einen gleich einem Abschnitt der andern ist, sind einander gleich. — 253. Errichtet man auf einer Sehne in gleichem Abstände von ihren Endpunkten Senkrechten nach derselben Seite bis zur Kreislinie, so sind dieselben einander gleich. — 254. Gehört eine Sehne zu zwei verschiedenen, auf derselben Seite liegenden Kreisbogen, so schneiden die Schenkel aller zu dieser Sehne gehörigen Peripheriewinkel des äusseren Bogens gleiche Stücke auf dem inneren Bogen ab. — 255. Werden zwei gleich lange Sehnen von einer dritten so geschnitten, dass ein Abschnitt der einen gleich einem Abschnitt der andern ist, so sind auch die äusseren Abschnitte der dritten Sehne einander gleich. — 256. Geht eine von zwei gleich grossen Kreislinien durch den Mittelpunkt der andern, so sind auf jeder, mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen, Sehne die äusseren Abschnitte dem Radius gleich. — 257. Schneidet die Verlängerung eines Durchmessers eine Secante so, dass der äussere Abschnitt derselben gleich dem Radius ist, so ist einer der beiden Bogen zwischen Durchmesser und Sehne das Dreifache des andern. — 258. Zieht man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreislinien zwei gemeinsame Sehnen und verbindet deren Endpunkte mit dem anderen Schnittpunkte, so haben die beiden über den Sehnen stehenden Dreiecke gleiche Winkel unter einander und mit dem Dreieck, dessen Ecken der erste Schnittpunkt und die Mittelpunkte sind. — 259. Zieht man in einem Dreieck aus dem Scheitel des Winkels  $\alpha$  die Linien  $h_1, m_1, r$ , so sind die Winkel  $(h_1 m_1) = (m_1 r) = \frac{\beta - \gamma}{2}$ , und  $(b h_1) = (c r)$ . — 260. Verlängert man die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks über ihre Fusspunkte hinaus um ihre unteren Abschnitte, so liegen die Endpunkte der Verlän-



gerungen mit den Ecken des Dreiecks auf derselben Kreislinie. — 261 Beschreibt man um einen Schnittpunkt zweier gleicher Kreislinien eine Kreislinie, welche die anderen schneidet, so liegen von den vier neuen Schnittpunkten zweimal zwei in gerader Linie mit dem andern Schnittpunkte der beiden Kreislinien.

262) In einer geg. Geraden einen Punkt zu bestimmen, 167. von dem aus eine geg. Strecke unter einem geg. Winkel erscheint. — Einen Punkt zu finden, von dem aus 263) zwei Seiten eines geg. Dreiecks unter geg. Winkeln, 264) die drei Seiten eines geg. Dreiecks unter gleichen Winkeln erscheinen. — Aus  $a$  und  $\alpha$  ein Dreieck zu zeichnen, in welchem 265) auf  $a$  der Fusspunkt von  $m_1$  gegeben ist, 266) die Mittellinie  $t_1$  den Winkel  $\alpha$  im Verhältniss von  $p:q$  theilt. (Specieller Fall von A. 263). — 267) Ein Quadrat von einer geg. Ecke aus so zu zeichnen, dass die gegenüberliegenden Seiten durch zwei geg. Punkte gehen.

Ein Dreieck zu zeichnen aus 268)  $a, b, t_1$ , 269)  $a, \beta, t_1$ , 168. 270)  $a, \alpha, t_1$ ,

271)  $a, t_1, h_1$ , 272)  $\beta, t_1, h_1$ , 273)  $a, \alpha, h_1$ , 274)  $a, b, h_3$ , 169. 275)  $a, h_2, t_2$ , 276)  $a, h_2, t_1$ , 277)  $\alpha, h_2, t_3$ , 278)  $\alpha, h_2, h_3$ , 279)  $a, h_2, h_3$ , 280)  $a, \alpha$  und Differenz der durch  $h_1$  gebildeten Abschnitte von  $a$ , 281)  $a, h_2, t_3$  (127), 282)  $\alpha, t_1, h_2$  (127), 283)  $a, h_1, t_2$  (133), 284)  $b + c, h_3, \beta$ , 285)  $b - a, c, h_2$ , 286)  $p, h_1, \beta$ , 287)  $p_2, h_3, \alpha$ , 288)  $h_3, \alpha, \beta$ , 289)  $a + h_3, b, \beta$ , 290)  $a - h_3, \alpha, \beta$ , 291)  $h_3, m_3, \gamma$ , 292)  $a, b, h_1 \pm h_2$  (A. 148), 293)  $\alpha, \beta, h_1 \pm h_2$  (A. 148), 294)  $a \pm b, h_1 \pm h_2, \alpha$  (A. 148), 295)  $c, m_1, \beta - \gamma$  (A. 259), 296) wenn geg. ist die Lage von  $a$  und die Fusspunkte von  $h_2$  und  $h_3$ , 297) die Mitte von  $b$  und die Fusspunkte von  $h_2$  und  $h_3$ .

298. Die Mitten aller aus einem Punkte der Kreislinie 170. gezogenen Sehnen liegen auf einer Kreislinie.

299. Von allen durch einen Punkt innerhalb der Kreis- 176. fläche gehenden Sehnen ist diejenige die kleinste, welche in diesem Punkte halbt wird.

300. Unter allen Senkrechten, die man von Punkten der 177. Kreislinie auf eine ausserhalb derselben liegende Gerade fallen kann, ist diejenige die grösste, welche durch den Mittelpunkt geht, diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

301. Liegen die Ecken eines Dreiecks auf einer Kreis- 178. linie, und fällt man aus einem Punkte der letzteren die Senk-



- rechten auf die Seiten, so liegen die Fusspunkte derselben in gerader Linie (Umk. z. 61).
179. 302) In der Verlängerung eines geg. Durchmessers einen Punkt so zu bestimmen, dass die aus ihm an die Kreislinie gezogene Tangente gleich einer geg. Strecke ist. — Einen Punkt so zu bestimmen, dass die von ihm an zwei gegebene Kreislinien gezogenen Tangenten 303) gleich geg. Strecken sind, 304) einen geg. Winkel bilden, der durch die auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gefällte Senkrechte halbiert wird (84).
180. In eine geg. Kreislinie eine geg. Strecke als Sehne so einzutragen, 305) dass sie durch einen innerhalb der Kreisfläche geg. Punkt geht, 306) dass ihre Verlängerung durch einen ausserhalb der Kreisfläche geg. Punkt geht (163), 307) dass sie einer geg. Geraden parallel wird, 308) dass sie von einer geg. Sehne halbiert wird. — In eine geg. Kreislinie parallel einer geg. Geraden eine Sehne so zu zeichnen, dass sie 309) von einer geg. Sehne, 310) von einer geg. Kreislinie halbiert wird. — 311) Aus dem einen Endpunkt eines Durchmessers bis zu der im andern Endpunkt gezogenen Tangente eine Secante so zu ziehen, dass ihre beiden Abschnitte einander gleich sind (165).
185. 312) Ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem geg. Dreieck gleiche Winkel hat, und dessen Ecken auf einer geg. Kreislinie liegen.
186. 313. Zieht man aus einem Punkte, dessen Abstand vom Kreismittelpunkte gleich dem Durchmesser ist, die Tangenten an die Kreislinie, so ist der Winkel derselben  $\frac{2}{3}R$ .
193. Eine Kreislinie zu construiren aus 314)  $r, A, B$ , 315)  $A, B, C$ ,\*)
194. 316)  $r, A, a$ , 317)  $A, B, a$ ,
195. 318)  $a, a_1, A$ , 319)  $a, a_1, B$ ,
196. 320)  $a, b, A$ , 321)  $a, a_1, b$ ,
197. 322)  $r, A, b$ , 323)  $r, a, b$ .
198. 324) Zu einer Seite eines geg. Dreiecks eine Parallele so zu ziehen, dass die Seite gleich der Summe der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist. (106)

---

\*) Bezeichnungen im Kreise:  $r$  Radius,  $O$  Mittelpunkt,  $ABC$  Punkte der Kreislinie,  $abc$  Tangenten mit verschiedener Richtung ( $A$  liegt auf  $a$ ,  $B$  auf  $b$ , u. s. w.),  $aa_1$  parallele Tangenten,  $k_1, k_2 \dots$  gegebene Kreislinien,  $K_1, K_2 \dots$  gegebene Punkte dieser Kreislinien.



325) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Fusspunkte 201. der Höhen gegeben sind.

326. Verbindet man zwei Ecken eines Dreiecks mit dem 202. Mittelpunkte des Inkreises, so ist der Winkel der Verbindungslinien gleich  $R +$  dem halben Winkel an der dritten Ecke.

Ein Dreieck zu zeichnen aus  $r$  und 327)  $a, b$ , 328)  $a, h_1$ , 329)  $a, \beta$ , 330)  $a, h_2$ , 331)  $\alpha, \beta$ , 332)  $h_1, t_1$ , 333)  $h_1, \alpha$ , 334)  $t_1, \alpha$ , 335)  $b, \beta - \gamma$ , 336)  $c, \beta - \gamma$ , 337)  $a, \beta - \gamma$ , 338)  $b \pm c, \beta$ , 339)  $b - c, \gamma$ , 340)  $a, b \pm c$ , 341)  $\alpha, b \pm c$ , 342)  $\alpha, p$ , 343)  $a, t_2$ , 344)  $\alpha, t_2$ ; dgl. aus  $\varrho$  und 345)  $\alpha, \beta$ , 346)  $a, m_1$ , 347)  $a, \beta$ , 348)  $a, h_2$ , 349)  $\alpha, h_2$ , 350)  $h_1, t_1$ ; 351) dgl. ein gleichseitiges Dreieck aus  $r \pm \varrho$ .

352. In jedem Sehnenpolygon von gerader Seitenzahl ist 206. die Summe des 1, 3, 5<sup>ten</sup>... Winkels gleich der des 2, 4, 6<sup>ten</sup>...

— 353. Die auf einer Sehne in ihren Endpunkten errichteten Senkrechten schneiden auf jedem Durchmesser von seinen Endpunkten aus zwei gleiche Stücke ab (134). — 354. Sind in einem Sehnenviereck zwei anstossende Seiten gleich, so sind die ihnen anliegenden Winkel gleich den Winkeln der Diagonalen. — 355. Die Halbierungslinien der Winkel eines Vierecks bilden ein Sehnenviereck. — 356. Verbindet man drei beliebige Punkte auf den Seiten eines Dreiecks mit einander, so schneiden sich die Umkreise der drei äusseren Dreiecke in einem Punkte. — 357. Beschreibt man um die Seiten eines Sehnenvierecks als Durchmesser Kreislinien, so bilden die vier zweiten Schnittpunkte je zweier benachbarter Kreislinien ein neues Sehnenviereck. 358. Halbt man in einem Sehnenviereck die Winkel an den Schnittpunkten der Diagonalen und der Verlängerungen je zweier Gegenseiten, so sind von den 6 Halbierungslinien zweimal drei parallel. 358. Construiert man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks ( $\overline{ABC}$ ) nach aussen ein gleichseitiges Dreieck ( $\overline{A_1BC}$ ,  $\overline{B_1AC}$ ,  $\overline{C_1AB}$ ), so schneiden sich die Linien  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  in demselben Punkte wie die Umkreise der gleichseitigen Dreiecke.

360. In jedem Tangentenpolygon von gerader Seitenzahl 207. ist die Summe der 1, 3, 5<sup>ten</sup>... Seite gleich der der 2, 4, 6<sup>ten</sup>...

361. Ist ein Rechteck dem Kreise einbeschrieben, so bilden die in seinen Ecken gezogenen Tangenten einen Rhombus.

362. Verbindet man in einem regelmässigen Polygon von 208. ungerader Seitenzahl ( $n$ ) eine Ecke mit den Endpunkten der gegenüberliegenden Seite, so entsteht ein gleichschenkliges



Dreieck, in welchem ein Basiswinkel  $\frac{n-1}{2}$  mal grösser ist als der Winkel an der Spitze.

211. 363) In ein geg. gleichseitiges Dreieck ein anderes von geg. Seite so zu zeichnen, dass die Ecken des zweiten auf den Seiten des ersten liegen.

216. 364. Trägt man auf jeder Seite eines Quadrats von beiden Endpunkten aus die halbe Diagonale ab, so sind die Endpunkte die Ecken eines regelmässigen Achtecks.

218. 365) Ein gleichseitiges Dreieck so abzustumpfen, dass ein regelmässiges Sechseck entsteht.

229. 366. Zwei Kreislinien können sich nicht gegenseitig halbieren (165).

230. Schneiden sich zwei gleiche Kreislinien, so sind 367. die abgeschnittenen Bogen der einen gleich denen der andern, und die Centrallinie wird durch die gemeinsame Sehne halbiert; 368. jede durch den Schnittpunkt dieser Linien zwischen den äusseren oder inneren Bogen gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbiert.

369) Den geom. Ort für den Mittelpunkt eines Kreises zu bestimmen, der einen gegebenen Radius hat, und einen geg. Kreis unter einer Sehne von gegebener Länge ( $s$ ) schneidet. — Eine Kreislinie zu construiren aus 370)  $r, A, s$ , 371)  $r, a, s$ , 372)  $r, s_1, s_2$ .

231. 373. Jede durch den Berührungspunkt zweier Kreislinien gezogene Secante schneidet Bogen mit gleichen Centriwinkeln ab. Die nach den Schnittpunkten dieser Geraden gehenden Radien sind parallel. — 374. Die Sehnen, welche die Schnittpunkte zweier durch den Berührungspunkt zweier Kreislinien gehenden Secanten verbinden, sind parallel.

375) Aus drei gegebenen Mittelpunkten drei einander von aussen berührende Kreislinien zu zeichnen (202). — Drei einander von aussen berührende gleiche Kreislinien so zu zeichnen, dass jede 376) eine gegebene Kreislinie von innen, 377) zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks berührt.

236. Eine Kreislinie zu construiren aus 378)  $A, k_1, K_1$ ,

237. 379)  $a, a_1, k_1$ , 380)  $r, a, k_1$ , 381)  $r, A, k_1$ , 382)  $r, k_1, k_2$ , 383)  $K_1, k, k_1$  (concentrisch), 384)  $A, k, k_1$ , 385)  $K, k, k$  (gleich gross), 386)  $k, k, k$ , 387)  $r, k, k$ .

239. 388) Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, welche verlängert durch den nicht gegebenen Schnittpunkt von zwei geg. Geraden gehen würde. — Durch einen zwischen den



Schenkeln eines Winkels geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass die 389) auf ihr selbst, 390) auf den Schenkeln des Winkels abgeschnittenen Stücke ein gegebenes Verhältniss haben.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen 245. 391. denen des anderen parallel sind, 382. auf denen des anderen senkrecht stehen. — 393. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn ein spitzer Winkel, 394. gleichschenklige, wenn der Winkel an der Spitze oder ein Basiswinkel in beiden gleich ist. — 395. Verlängert man die Seiten zweier ähnlicher Dreiecke, bis je zwei homologe Seiten sich schneiden, so sind die drei Winkel an diesen Schnittpunkten einander gleich. — 396. Im gleichschenkligen Dreieck verhält sich der Schenkel zur Höhe auf der Basis, wie der obere Abschnitt der Höhe auf dem Schenkel zur Hälfte der Basis. — 397. Verlängert man die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks bis zur Peripherie des Umkreises, so ist jede Verlängerung gleich dem unteren Abschnitte der zugehörigen Höhe.

Ein Dreieck zu zeichnen, welches einem geg. Dreieck ähnlich ist, aus 398)  $a$ , 399)  $h_1$ . — 400) Dgl. ein rechtwinkliges Dreieck aus  $c$ ,  $a:b$ . — 401) Dgl. ein gleichschenkliges aus  $h_1$ ,  $a:b$ . — Dgl. ein Dreieck aus 402)  $a$ ,  $a:b$ ,  $a:c$ , 403)  $a$ ,  $b+c$ ,  $b:c$ , 404)  $a$ ,  $\beta$ ,  $b:c$ , 405)  $a$ ,  $\alpha$ ,  $b:c$ , 406)  $a$ ,  $r$ ,  $b:c$ , 407)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a+h_1$ , 408)  $\alpha$ ,  $h_1$ ,  $b:c$ . — 409) Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade so zu ziehen, dass dieser Punkt gleichen Abstand hat von den Fusspunkten der Senkrechten, die man von den beiden andern Punkten auf die Gerade fallen kann (33). — 410) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei gegebenen Parallelen liegen. (Ein Theil des Dreiecks ist durch die in A. 408 gegebenen Stücke bekannt.) — 411) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Punkte gegeben sind, in denen die Verlängerungen seiner Höhen den Umkreis treffen (A. 397).

Ist das Punktepaar  $A_1B_1$  harmonisch mit  $AB$ , und  $M$  252. die Mitte von  $AB$ , so ist 412.  $AB \cdot A_1B_1 = 2AA_1 \cdot BB_1 = 2BA_1 \cdot AB_1$ , 413.  $AB^2 + A_1B_1^2 = (AA_1 + BB_1)^2$ , 414.  $MA_1:MB_1 = BA_1^2:BB_1^2 = AA_1^2:AB_1^2$ , 415.  $AA_1 \cdot BA_1 = MA_1 \cdot A_1B_1$ , 416.  $MA \cdot A_1B_1 = AA_1 \cdot BB_1$ .

417. Wenn in einem Dreieck die Halbirungslinie eines 253. Winkels die Gegenseite halbirt, so ist das Dreieck gleichschenkl. (Warum nicht nach 104?) — 418. Wenn die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in drei gleiche Theile getheilt



ist, und die Theilpunkte mit der Spitze verbunden sind, so theilen die Verbindungslinien den Winkel an der Spitze nicht in drei gleiche Theile.

255. 419. Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den Ecken eines Dreiecks sich wie drei geg. Strecken verhalten. — 420. Ein Dreieck zu zeichnen aus  $a$ ,  $\alpha$  und dem Fusspunkt der Halbirungslinie von  $\alpha$ .

257. 421. Sind durch einen Punkt  $S$  der Kreislinie zwei Secanten gezogen, von denen die erste durch den Mittelpunkt geht, und ist in einem Punkte der ersten eine Senkrechte errichtet, so ist, wenn die Schnittpunkte der Secanten mit der Kreislinie  $A$  und  $B$ , mit der Senkrechten  $A_1$  und  $B_1$  sind:  $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$ . — 422. Wenn in einem Viereck auf den beiden Diagonalen oder auf zwei Gegenseiten die Producte aus den vom Schnittpunkt ausgehenden Abschnitten einander gleich sind, so ist es ein Sehnenviereck.

423) Zu drei gegebenen Strecken  $a$ ,  $b$ ,  $c$  zwei andre  $x$ ,  $y$  zu finden, so dass  $a : x = y : b$  und  $x \pm y = c$  ist.

258. 424. Ist im Dreieck  $\overline{ABC}$  auf der Verlängerung von  $BC$  ein Punkt  $S$  so gelegen, dass  $SA^2 = SB \cdot SC$ , so ist  $SA$  Tangente an den Umkreis des Dreiecks. — 425. Jede Tangente ist grösser als der äussere Abschnitt einer aus ihrem Endpunkte gezogenen Secante, und kleiner als die ganze Secante. — 426. Ist eine Tangente doppelt so gross als der äussere Abschnitt einer aus ihrem Endpunkte gezogenen Secante, so ist die ganze Secante viermal so gross als ihr äusserer Abschnitt. — 427. Haben die Endpunkte zweier Secanten gleichen Abstand vom Mittelpunkte des Kreises, so ist das Product der von den Endpunkten ausgehenden Abschnitte] auf der einen so gross wie auf der andern.

Eine Kreislinie zu zeichnen aus 428)  $A$ ,  $B$ ,  $c$ , 429)  $a$ ,  $b$ ,  $C$  430)  $a$ ,  $b$ ,  $k_1$  (A. 429), 431)  $A$ ,  $B$ ,  $k_1$  (A. 422), 432)  $A$ ,  $b$ ,  $k_1$  (A. 421, 422, 428). — Dgl. eine Kreislinie, deren Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liegt, aus 433)  $A$ ,  $b$  (A. 428), 434)  $A$ ,  $k_1$  (A. 431), 435)  $a$ ,  $k_1$  (A. 433), 436)  $k_1$ ,  $k_2$  (A. 434). — 437) Durch einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, dass auf ihr durch zwei geg. concentrische Kreislinien drei gleiche Stücke abgeschnitten werden.

259. 438. Errichtet man in den Endpunkten der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks Senkrechten, welche von den Verlängerungen der Katheten  $a$  und  $b$  die Stücke  $a_1$  und  $b_1$  abschneiden, so ist  $c^2 = aa_1 \pm bb_1$  und  $ab = a_1b_1$ . — 439. Ist



im gleichschenkligen Trapez die Diagonale gleich der grösseren parallelen Seite  $a$  (während  $b$  die kleinere parallele und  $c$  die nicht parallele Seite ist), so ist  $c^2 = a(a - b)$ , und  $ab = a^2 - c^2$ .

440. In jedem Sehnenviereck ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte aus je zwei Gegenseiten (Satz des Ptolemäus,\*) 166, 245). — 441. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck ( $a > b$ ) die Schenkel auf der Basis von ihren Endpunkten aus abgetragen, und die Endpunkte mit der Spitze verbunden werden, so ist jede dieser Verbindungslinien die mittlere Proportionale zwischen dem Schenkel und dem mittelsten Stück der Basis. — 442. Wenn in demselben Dreieck (A. 441) die Basiswinkel vom Winkel an der Spitze von beiden Schenkeln aus abgetragen werden, so ist jeder Schenkel mittlere Proportionale zwischen der Basis, und dem Schenkel des kleineren gleichsch. Dreiecks. — 443. Ist in einem Dreieck die Seite  $a$  durch  $m_1$  in die Abschnitte  $a_1$  und  $a_2$  getheilt, so ist  $m_1^2 = bc - aa_1$  (257).

444) Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die Summe der Sehnen einer geg. Strecke gleich ist (A. 258, 398).

Eine Kreislinie zu zeichnen, die eine gegebene Kreislinie 262. rechtwinklig schneidet, aus 445)  $O$ , 446)  $r$ ,  $A$ .

447) Eine Kreislinie zu zeichnen, die drei gegebene Kreis- 263. linien rechtwinklig schneidet.

448) Eine Kreislinie zu zeichnen, die eine gegebene K. 264. berührt, und mit einer anderen geg. K. eine gegebene Gerade zur Potenzlinie hat.

449. Sind  $O, O_1, O_2$  die Mittelpunkte,  $r, r_1, r_2$  die Radien 265. dreier Kreislinien, so ist, wenn die gemeinsame Sehne der Kreise  $O$  und  $O_1$  gleich  $2r_1$ , und die von  $O$  und  $O_2$  gleich  $2r_2$  ist,  $OO_1^2 - OO_2^2 = r_2^2 - r_1^2$ . (Kreis  $O$  schneidet die Kreise  $O_1$  und  $O_2$  „im Durchmesser“.) — 450. Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei gegebene Kreise in ihren Durchmessern schneidet, ist eine zur Centrallinie dieser Kreise senkrechte Gerade (ihr „zweiter Potenzort“), deren Fusspunkt man erhält, wenn man den Abstand des einen Mittelpunktes von der Potenzlinie vom andern Mittelpunkt aus in entgegengesetzter Richtung auf der Centrallinie abträgt. — 451. Alle Kreislinien, welche zwei geg. Kreislinien im Durch-

\*) Cl. Ptolemäus, alexandrinischer Astronom und Mathematiker, im zweiten Jahrhundert n. Chr.



messer schneiden, gehen durch dieselben zwei Punkte der Centrallinie. — 452. Alle Kreislinien, die eine geg. Kreislinie im Durchmesser schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, schneiden sich in denselben zwei, mit dem Mittelpunkt der geg. Kreislinie in gerader Linie liegenden Punkten. — 453. Liegt ein Punkt auf dem zweiten Potenzort zweier Kreislinien, so ist die Differenz seiner Potenzen gleich der doppelten Differenz der Quadrate der Radien. — 454. Die zweiten Potenzörter dreier Kreislinien schneiden sich in einem Punkte. — 455. Sind  $O, O_1, O_2$  die Mittelpunkte,  $r, r_1, r_2$  die Radien dreier Kreislinien, so ist, wenn der Kreis  $O$  den Kreis  $O_1$  rechtwinklig, und den Kreis  $O_2$  im Durchmesser schneidet,  $OO_1^2 - OO_2^2 = r_2^2 + r_1^2$ . — 456. Der geom. Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der einen geg. Kreis rechtwinklig, und einen andern geg. Kreis im Durchmesser schneidet, ist eine zur Centrallinie dieser Kreise senkrechte Gerade (ihr „dritter Potenzort“), deren Fusspunkt  $O$  durch A. 455 bestimmt ist. — 457. Alle Kreislinien, die eine geg. Kreislinie rechtwinklig, und eine andre geg. Kreislinie im Durchmesser schneiden, gehen durch dieselben zwei Punkte der Centrallinie. — 458. Liegt ein Punkt auf dem dritten Potenzort zweier Kreislinien, so ist die Differenz seiner Potenzen gleich dem doppelten Quadrat des Radius des im Durchmesser geschnittenen Kreises. — 459. Bei drei gegebenen Kreislinien schneiden sich je zwei dritte Potenzörter mit einem zweiten in demselben Punkte, ebenso je zwei dritte Potenzörter mit einer Potenzlinie.

267. **460)** In einem Dreieck einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den drei Seiten in gegebenen Verhältnissen stehen.

274. **461.** Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt in gerader Linie zwischen dem Mittelpunkte des Umkreises und dem Schnittpunkte der Höhen, und zwar doppelt so weit vom letzteren als vom ersteren. — 462. Der obere Abschnitt jeder Höhe im Dreieck ist doppelt so gross als die auf derselben Seite stehende Mittelsenkrechte. — 463. Die Verbindungslinie der Mitte einer Dreieckseite mit der Mitte des oberen Abschnittes der zugehörigen Höhe ist gleich dem Radius des Umkreises. — 464. In jedem Dreieck liegen die Mitten der Seiten, die Fusspunkte der Höhen, und die Mitten der oberen Abschnitte der Höhen auf einer Kreislinie. Der Mittelpunkt derselben liegt in der Mitte zwischen dem Schnittpunkte der Höhen und dem Mittelpunkte des Umkreises; ihr Radius ist



halb so gross als der des Umkreises. (Kreis der neun Punkte.)

Ein Dreieck zu zeichnen aus 465)  $t_1, t_2, t_3$ , 466)  $t_1, t_2, h_1$ , 467)  $a, t_2, t_3$ , 468)  $t_1, t_2, h_3$ , 469)  $t_1, t_2$  und Winkel  $(t_1 t_2)$ , 470)  $a, t_1 \pm t_2$ , Winkel  $(t_1 t_2)$ , 471)  $a, t_1 : t_2$ , Winkel  $(t_1 t_2)$ . — 472) In einem geg. Dreieck einen Punkt so zu bestimmen, dass seine Verbindungslinien mit den Ecken die Fläche des Dreiecks in drei gleiche Theile theilen.

Eine Kreislinie zu zeichnen aus 473)  $a, A, k_1$ , 474) 279.  $a, k_1, K_1$ , 475)  $k_1, K_1, k_2$ .

Methode c). — 476) In ein geg. Dreieck ein Quadrat 280. so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf einer Seite, die beiden andern Ecken auf den beiden andern Seiten liegen. — 477) In ein geg. Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so zu zeichnen, dass eine Ecke des Dreiecks in eine Ecke des Quadrats, und die andern beiden Ecken in zwei Seiten des Quadrates fallen. — 478) Zwischen zwei Seiten eines geg. Dreiecks eine Strecke zu ziehen, welche gleich jedem der unteren Abschnitte dieser Seiten ist. — 479) In ein geg. Dreieck ein andres Dreieck so zu zeichnen, dass es einem geg. Dreieck ähnlich, und eine seiner Seiten einer Seite des ersten Dreiecks parallel ist. — 480) In einen geg. Halbkreis ein Quadrat so zu zeichnen, dass eine Seite in den Durchmesser fällt. — 481) In einen geg. Quadranten ein Quadrat so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf dem Bogen, zwei auf den Radien liegen. — Ein Dreieck zu zeichnen aus 482)  $\alpha, \beta, t_1$ , 483)  $\alpha, \beta, r$ , 484)  $\alpha, \beta, m_1$ , 485)  $h_1, t_2 : t_3$ , Winkel  $(t_2 t_3)$ . — Ein Viereck zu zeichnen aus 486) einer Diagonale und den vier Winkeln, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet, 487) einer Seite und den vier Winkeln, welche die Diagonalen an den gegenüberliegenden Ecken mit den anderen Seiten bilden, 488) einer Seite, den anliegenden Winkeln und den Verhältnissen der anderen Seiten.

Methode d). — 489) Ein Dreieck aus gegebenen Winkeln so zu zeichnen, dass eine Ecke in einem geg. Punkte, und die andern Ecken in zwei geg. Geraden liegen. — 490) Aus einem geg. Punkte drei geg. Strecken so zu ziehen, dass ihre Endpunkte drei Ecken eines Quadrates sind. — 491) Ein Polygon zu zeichnen, welches einem geg. Polygon ähnlich ist, und von welchem drei Ecken auf den Seitenlinien eines geg. Dreiecks liegen. — 492) Durch zwei auf einer Geraden geg. Punktepaare zwei Parallelenpaare so zu ziehen, dass dieselben ein



- Quadrat einschliessen. — 493) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ecken auf vier gleichweit von einander entfernten geg. Parallelen liegen. — 494) Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei geg. concentrischen Kreislinien liegen (255). — 495) Ein geg. Dreieck so zu legen, dass seine Ecken auf den Seitenlinien eines anderen geg. Dreiecks liegen (167, A. 444).
289. 496) An zwei gegebene Kreislinien die gemeinsamen Tangenten zu ziehen. — 497) In eine geg. Kreislinie eine geg. Strecke als Sehne so einzutragen, dass ihre Verlängerung eine andere geg. Kreislinie berührt.
297. 498) Eine Kreislinie zu zeichnen aus  $A, k_1, k_2$ .
299. 499. Die Mitten der Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegen auf einer Geraden.
312. 500. Im Dreieck  $\overline{ABC}$  sei  $MD \parallel AB$ . Sei  $M_1$  der Schnittpunkt von  $MB$  und  $AD$ ;  $A_1$  der von  $CM_1$  und  $AB$ . Ferner sei  $M_2$  der Schnittpunkt von  $MB$  und  $A_1D$ ;  $A_2$  der von  $CM_2$  und  $AB$ , u. s. w. Dann ist  $AB = 2 \cdot A_1B = 3 \cdot A_2B = 4 \cdot A_3B$ , u. s. w.
345. 501) Eine Kreislinie zu zeichnen aus  $k_1, k_2, k_3$ . (Apollonisches\*) Berührungsproblem.)
352. 502) Die Formeln  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  geometrisch darzustellen. (Vgl. A. 167.)
354. 503. Ist ein Dreieck einem zweiten, und dieses einem dritten so einbeschrieben, dass die Seiten des ersten denen des dritten parallel sind, und sind  $F_1, F_2, F_3$  ihre Flächen, so ist  $F_1 : F_2 = F_2 : F_3$ . — 504. Die Fläche eines Sehnenvierecks, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist gleich der halben Summe der Producte je zweier Gegenseiten (A. 440).
- Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, 505) mit gleicher Grundlinie und gegebenem Gegenwinkel, 506) welches einem geg. Dreieck ähnlich ist, 507) gleichschenkelig mit geg. Winkel an der Spitze, 508) gleichseitig (A. 505, 507). — Ein gegebenes 509) gleichschenkeliges, 510) ungleichseitiges Dreieck in ein Parallelogramm von gleichem Umfang zu verwandeln (145).
355. 511) Ein Dreieck zu zeichnen aus  $h_1, h_2, h_3$  (Meth. c).
356. 512. Trapeze mit gleicher Höhe und Mittellinie sind flächengleich. — 513. Theilt man die Mittellinie eines Trapezes in  $n$  gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte zwischen den parallelen Seiten beliebige, sich nicht schneidende Strecken, so wird das Trapez in  $n$  gleiche Theile getheilt. — 514. Verbindet man einen beliebigen Punkt der Mittellinie eines Tra-

\*) Apollonius von Perga, alexandrinischer Mathematiker, um 200 v. Chr.



pezes mit den Ecken, so ist die Summe der an den Parallelen liegenden Dreiecke gleich der Summe der beiden anderen.

515) Ein Trapez in ein Rechteck zu verwandeln. — 516) Ein Parallelogramm durch Strecken, die von einem auf einer Seite geg. Punkt ausgehen, in  $n$  gleiche Theile zu theilen.

517. Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich, wenn 358. zwei ihrer Winkel Supplementwinkel sind, wie die Producte der diese Winkel einschliessenden Seiten. — 518. Zwei Dreiecke sind flächengleich, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, und die eingeschlossenen Winkel Supplementwinkel sind. — 519. Construiert man über jeder Seite eines Dreiecks nach aussen ein Quadrat und verbindet die Endpunkte je zweier von derselben Ecke des Dreiecks ausgehender Quadratseiten, so sind die entstehenden Dreiecke unter sich und mit dem gegebenen flächengleich. — 520. Ein Viereck, dessen Fläche durch jede seiner Diagonalen halbirt wird, ist ein Parallelogramm. — 521. Die Fläche jedes Dreiecks ist gleich dem Producte seiner drei Seiten, dividirt durch den doppelten Durchmesser des Umkreises. — 522. Die Diagonalen eines Sehnenvierecks verhalten sich wie die Summen der Producte aus je zwei an einem ihrer Endpunkte zusammenstossenden Seiten.

523) Von einem geg. Dreieck eine Seite einer geg. Geraden parallel zu machen, ohne dass der Inhalt geändert wird.

524. Stehen die Diagonalen eines Vierecks auf einander 362. senkrecht, so sind die Summen der Quadrate aus je zwei Gegenseiten einander gleich, und die Summe der Quadrate der Diagonalabschnitte ist halb so gross als die Summe der Quadrate der Seiten. — 525. Sind von einem Punkte  $P$  aus Senkrechten  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  auf die Seitenlinien  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  eines Dreiecks gefällt, so ist  $AB_1^2 + CA_1^2 + BC_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$ . — 526. Fällt man im gleichschenkligen Dreieck die Höhe auf einen Schenkel, so ist die Basis mittlere Proportionale zwischen der Summe der Schenkel und dem unteren Abschnitt des einen.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches 527) gleich der Summe, 528) gleich der Differenz zweier gegebener Quadrate, 529)  $n$ -mal so gross als ein gegebenes Quadrat ist.

530. Beschreibt man über der Hypotenuse eines recht- 363. winkligen Dreiecks nach innen, und über den Katheten nach aussen Halbkreise, so ist die Summe der Flächen der beiden



mondförmigen Figuren (lunulae Hippocratis<sup>\*)</sup>) gleich der Fläche des Dreiecks.

531) Ein Polygon zu zeichnen, welches gleich der Summe zweier gegebener Polygone ist.

364. 532. Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks nach aussen Quadrate, und fällt aus jeder Ecke des Dreiecks die Senkrechte auf die zur Gegenseite parallele Seitenlinie des Quadrates, so sind von den entstehenden 6 Rechtecken je zwei an derselben Ecke des Dreiecks liegende flächengleich (141, 91).

366. 533. Die Summe der Quadrate der Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat der Verbindungsstrecke der Mitten der Diagonalen. — 534. Die Summe der Quadrate der Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate seiner Diagonalen.

## B. Sätze und Aufgaben aus der rechnenden Geometrie.

535. Das Dreieck, welches aus den Seiten des demselben Kreise eingeschriebenen Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks gebildet wird, ist rechtwinklig. — 536. Verlängert man die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks über die Spitze hinaus um die Länge einer Seite, theilt die Verlängerung in sechs gleiche Theile und verbindet die Theilpunkte mit den Endpunkten der Grundlinie, so sind die Endpunkte der Verlängerung die Mittelpunkte des regelmässigen 6- und 12-Ecks über der Grundlinie als Seite, die Theilpunkte aber näherungsweise die Mittelpunkte des über derselben Seite stehenden 7, 8, 9, 10, 11-Ecks. (Fortsetzung dieser Construction!) — 537. Die Kreislinie ist näherungsweise gleich dem Umfange eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten  $\frac{3}{5}$  und  $\frac{6}{5}$  des Durchmessers sind. — 538. In jedem Dreieck ist die Fläche gleich  $\sqrt{pp_1p_2p_3}$ , der Radius des Umkreises gleich  $\frac{abc}{4\sqrt{pp_1p_2p_3}}$ . — 539. Im Sehnenviereck ist

$$e = \sqrt{\frac{s_2s_3}{s_4}}, \quad d = \sqrt{\frac{s_4s_3}{s_2}}, \quad f^2 = \sqrt{p_1p_2p_3p_4}, \quad r = \frac{\sqrt{s_2s_3s_4}}{4f^2}. \quad —$$

540. Ist ein Viereck gleichzeitig Sehnen- und Tangentenviereck,

$$\text{so ist } f^2 = \sqrt{aa_1bb_1}, \quad r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{s_2s_3s_4}{aba_1b_1}}, \quad \varrho = \frac{\sqrt{aba_1b_1}}{a + a_1}. \quad **)$$

<sup>\*)</sup> Hippokrates von Chios, griechischer Mathematiker, um 450 v. Chr.

<sup>\*\*) Bezeichnungen im Viereck:  $aba_1b_1$  Seiten (der Reihe nach),</sup>



Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen aus 541)  $a, b$ , 542)  $a, c$ , 543)  $a, h_3$ , 544)  $a \pm b, c$ ; dgl. die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks aus 545)  $a$ , 546)  $h_1$ , 547)  $a \pm h_1$ , 548)  $r - \rho$ ; dgl. die Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks aus 549)  $a, b$ , 550)  $b, h_1$ , 551)  $a, h_2$ , 552)  $h_1, h_2$ , 553)  $p, h_1$ ; dgl. die Fläche eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks aus 554)  $\rho$ , 555)  $t_2$ ; dgl. die Fläche eines Quadrates aus 556)  $d$ , 557)  $d \pm a$ . — 558) In einen Kreis mit dem Radius  $r$  ist ein Rechteck beschrieben, dessen Fläche gleich  $f^2$  ist; wie gross sind seine Seiten? — 559) In einem Kreise (gegeben  $r$ ) ist über der zum Centriwinkel  $R$  gehörigen Sehne als Durchmesser nach aussen ein Halbkreis beschrieben. Man berechne Umfang und Fläche der mondförmigen Figur. — 560) Aus jeder Ecke eines gleichseitigen Dreiecks (gegeben  $a$ ) ist ein die beiden andern Ecken verbindender Kreisbogen beschrieben. Man berechne Umfang und Inhalt der von den drei Bogen begrenzten Figur. — 561) Umfang und Fläche des zwei Kreisen (gegeben  $r$ ) gemeinsamen Stückes zu berechnen, wenn der Mittelpunkt eines jeden auf der Peripherie des andern liegt. — 562) Drei gleichgrosse Kreislinien (gegeben  $r$ ) berühren sich gegenseitig von aussen. Man soll Umfang und Inhalt der zwischen ihnen liegenden Figur bestimmen. — 563) Die Fläche des Segmentes zu berechnen, welches zwischen der Seite ( $a$ ) eines gleichseitigen Dreiecks und der Peripherie des Umkreises liegt. — 564) Ein Kreis berührt den Bogen und die beiden Radien eines Quadranten (gegeben der Radius des letzteren,  $r$ ). Man soll die Flächen der drei zwischen der Kreislinie und dem Umfang des Quadranten liegenden Figuren berechnen. — 565) Der Durchmesser eines Kreises (geg.  $r$ ) ist in drei gleiche Theile  $a, b, c$  getheilt. Es sind ferner vier Halbkreise beschrieben, nach der einen Seite über  $a$  und  $a + b$ , nach der andern über  $b + c$  und  $c$  als Durchmesser. Man berechne die Flächen der drei Theile, in welche die Kreisfläche durch die 4 Halbkreise getheilt wird. — 566) Seite und Fläche eines gleichseitigen Dreiecks zu berechnen aus den Entfernungen ( $a, b, c$ ) seiner Ecken von einer geg. Geraden. — 567) Auf dem Durchmesser  $AB$  eines Halbkreises (geg.  $r$ ) steht in  $C$  eine senkrechte Strecke  $a$ , und über  $AC$

---

$c$  (aus der Ecke  $ba_1$ ) und  $d$  (aus der Ecke  $ba$ ) Diagonalen,  $2p = a + b + c + d$ ;  $p_1 = p - a$ ,  $p_2 = p - b$ ,  $p_3 = p - a_1$ ,  $p_4 = p - b_1$ ;  $s_2 = ab + a_1b_1$ ,  $s_3 = aa_1 + bb_1$ ,  $s_4 = ab_1 + a_1b$ ;  $f^2$  Fläche.



und  $CB$  als Durchmesser sind nach innen Halbkreise construirt. Wie gross ist die von den drei Halbkreisen begrenzte Fläche? — In eine Figur  $a$  ist eine Figur  $b$  so beschrieben, dass die Ecken von  $b$  die Mitten der Seiten von  $a$  sind; ebenso in  $b$  eine Figur  $a_1$ ; in  $a_1$  eine Figur  $b_1$ , u. s. w. ins Unendliche. Wie gross ist die Summe der Umfänge und die der Flächen aller Figuren, wenn alle Figuren 568) Quadrate, 569) gleichseitige Dreiecke sind? Wie gross ist die Summe der Umfänge und die der Flächen der Figuren  $a, a_1, \dots$ , oder der Figuren  $b, b_1, \dots$ , wenn die ersteren Kreise und die letzteren 570) Quadrate, 571) gleichseitige, 572) gleichschenklige-rechtwinklige Dreiecke sind?\*)

### C. Geometrische Aufgaben nach algebraischer Methode.\*\*)

In einem geg. Dreieck  $\overline{ABC}$  soll  $XY \parallel BC$  so gezogen werden, dass 573)  $XY = CY$ , 574)  $AX = CY$ , 575)  $XY^2 = AX \cdot AB$ , 576)  $BX \pm CY = d$ , 577)  $\overline{AXY} = \frac{1}{2} \overline{ABC}$ , 578)  $\overline{AXY} = \frac{m}{n} \overline{ABC}$ , 579)  $XY = BX \pm CY$ , 580)  $XY = AX \pm CY$ , 581)  $XY = AX - BX$ , 582)  $XY = CY - AX$ , 583)  $AX + CY = d$ , 584)  $CY - AX = d$ , 585)  $BC \pm XY = AX \pm AY$ , 586)  $BC + XY = BX + CY$ , 587)  $\overline{AXY} = \overline{BCX}$ , 588)  $BC:XY = AX:BX$ , 589)  $BC:XY = AX:CY$ , 590)  $AX \cdot CY = d^2$ , 591)  $XY^2 = BX \cdot CY$ , 592)  $XY^2 = BX^2 + CY^2$ , 593)  $XY \cdot BC = BX \cdot CY$ . — In einem geg. Dreieck  $\overline{ABC}$  soll zwischen  $AB$  und  $AC$  eine Strecke  $XY$  so gezogen werden, dass beide Theile des Dreiecks flächengleich sind, und 594)  $CX = BY$  ist, 595) beide Theile gleichen Umfang haben. — Ein Dreieck in drei gleiche Theile zu theilen durch Linien, welche 596) auf einer Seite senkrecht stehen, 597) einer Seite parallel sind, 598) einer geg. Geraden parallel sind. — In ein geg. Dreieck  $\overline{ABC}$  ein Rechteck zu zeichnen, dessen eine Seite auf  $BC$  liegt, wenn 599) eine seiner Diagonalen  $\parallel AB$  sein soll, 600) die Summe oder Differenz zweier anstossender Seiten, 601) das Verhältniss zweier anstossender Seiten, 602) die Diagonale, 603) der Inhalt des Rechtecks gegeben ist. — 604) Durch den Endpunkt  $B$  eines Durchmessers  $AB$  ist die Tangente an eine Kreislinie gelegt. Man soll eine Kreislinie

\*) Vgl. Th I, Nr. 143.

\*\*) Die kleinen Buchstaben bedeuten gegebene Strecken. Man bezeichne jede Strecke, gleichviel ob bekannt oder unbekannt, durch einen kleinen lateinischen Buchstaben, ehe man sie in eine Gleichung einführt!



zeichnen, welche durch  $A$  geht, die Tangente berührt, und deren Mittelpunkt auf der geg. Kreislinie liegt. — 605) In ein geg. Quadrat ein anderes geg. Quadrat zu zeichnen. — 606) Aus einer Ecke eines Dreiecks bis zur Gegenseite eine Strecke zu ziehen, welche die mittlere Proportionale zwischen den auf der Gegenseite (bzw. ihrer Verlängerung) entstehenden Abschnitten ist. — 607) Die Seiten eines geg. Quadrates um gleiche Stücke so zu verlängern, dass das durch Verbindung der Endpunkte entstehende neue Quadrat eine geg. Fläche hat. — 608) Durch einen Schnittpunkt zweier Kreislinien eine Gerade so zu ziehen, dass die entstehenden Sehnen ein geg. Verhältniss haben. — 609) Ein Dreieck zu zeichnen aus  $a, \alpha, m_1$  (166). — 610) In einen geg. Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Fläche gleich dem Quadrat seiner halben Höhe ist. — 611) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. — Ein Quadrat in ein Rechteck von geg. 612) Seite, 613) Diagonale, 614) Umfang, 615) Differenz zwischen Umfang und Summe der Diagonalen zu verwandeln. — 616) In einen geg. Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten eine stetige geom. Proportion bilden. — 617) Um einen geg. Kreis einen Rhombus von geg. Fläche zu zeichnen. — 618) In ein geg. Quadrat ein Rechteck zu zeichnen, dessen Seiten ein geg. Verhältniss haben. — 619) In ein geg. Viereck einen Rhombus zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel werden. — 620) Ein Trapez durch eine Parallele zu den parallelen Seiten zu halbiren. — 621) Zwei Seiten  $AB$  und  $AC$  eines Dreiecks um gleiche Stücke  $BB_1$  und  $CC_1$  so zu verlängern, dass das Dreieck  $\overline{AB_1C_1}$  einen geg. Flächeninhalt hat. — Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus 622)  $h_2, t_2$ , 623)  $\varrho, h_2$ . — 624) Durch einen geg. Punkt  $P$  zwischen den Schenkeln eines Winkels die Strecke  $XY$  so zu ziehen, dass  $PX \cdot PY$  gleich einer geg. Fläche  $a^2$  ist. — 625) In einen Rhombus ein Rechteck von geg. Umfang zu zeichnen. — 626) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn  $r$  gegeben ist, und Inhalt und Umfang, durch  $r^2$  und  $r$  gemessen, durch dieselbe Zahl ausgedrückt sind. — 627) Innerhalb eines Kreises ist ein Punkt  $P$  gegeben. Man soll auf der Kreislinie zwei Punkte  $X$  und  $Y$  so bestimmen, dass die Strecken  $PX, XY, YP$  mit den in  $X$  und  $Y$  gezogenen Tangenten gleiche Winkel bilden (253). — 628) In ein geg. Quadrat ein Rechteck von geg. Fläche zu zeichnen, dessen Seiten den Diagonalen des Quadrats parallel sind. — 629) Auf einer geg. Geraden



zwei Punkte so zu bestimmen, dass ihr Abstand den Tangenten gleich ist, welche man aus ihnen an eine geg. Kreislinie ziehen kann. — 630) In einen geg. Kreis einen concentrischen Kreis so zu zeichnen, dass die Fläche des Ringes mittlere Proportionale zwischen den Flächen der Kreise ist. — Zwei geg. Strecken  $AB$  und  $A_1B_1$  so auf eine Gerade zu legen, dass 631)  $AB_1, BA_1$ , 632)  $AA_1, BB_1$ , 633)  $AB, A_1B_1$  harmonische Punktepaare sind. — 634) Auf der Centrallinie zweier sich von innen berührender Kreislinien eine senkrechte Sehne zu errichten, welche durch die innere Kreislinie in drei gleiche Theile getheilt wird. — 635) Durch einen geg. Punkt  $P$  eines Durchmessers  $AB$  eine Sehne so zu ziehen, dass  $\overline{APC} : \overline{BPD} = m : n$ . — 636) Ein gleichschenkliges Trapez aus Grundlinie und Höhe so zu zeichnen, dass die Flächen der von den Diagonalen gebildeten gleichschenkligen Dreiecke ein geg. Verhältniss haben. — 637) Durch einen geg. Punkt  $P$  einer Sehne  $AB$  eine Sehne  $XY$  so zu ziehen, dass, wenn  $XY$  um  $P$  in die Richtung  $AB$  gedreht wird,  $AB$  und  $XY$  harmonische Punktepaare sind.

#### D. Vermischte Sätze und Aufgaben.

In jedem Dreieck ist 638.  $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)$ , 639.  $ab = 2rh_3$ , 640.  $(abc)^2 = (h_1h_2h_3) \cdot (2r)^3$ . — 641. Ist  $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$ , und sind  $M_1, M_2, M_3$  die Mitten dieser drei Strecken, so ist  $\overline{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}(\overline{A_1B_1C_1} + \overline{A_2B_2C_2})$ . — 642. Durch einen geg. Punkt innerhalb einer Kreisfläche kann man nur eine Sehne ziehen, die in diesem Punkte halbirt wird. — 643. Wenn zwei Sehnen eines Kreises sich gegenseitig halbiren, so sind sie Durchmesser. — 644. Beschreibt man aus einem Punkte der äusseren von zwei concentrischen Kreislinien eine Kreislinie, welche die innere unter rechtem Winkel schneidet, so ist die neue Kreisfläche gleich der Fläche des Ringes. — 645. Ist in einem Punkte  $D$  eines Durchmessers  $AB$  eine Senkrechte errichtet, welche eine Sehne  $AC$  in  $E$  schneidet, so ist  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AE}$ . — 646. Ist  $S$  der Schwerpunkt eines Dreiecks  $\overline{ABC}$ , und  $P$  ein beliebiger Punkt, so ist  $(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) - (\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2) = 3\overline{SP}^2$  (Erweiterung dieses Satzes auf ein Polygon!). — 647. Die drei Geraden, welche die Mitten der Gegenseiten und die Mitten der Diagonalen eines Vierecks verbinden, gehen durch einen Punkt. — 648. Ist die Sehne  $CD$  dem Durchmesser  $AB$  parallel, und  $P$  ein Punkt des Durchmessers,



so ist  $PC^2 + PD^2 = PA^2 + PB^2$  (366). — 649. Wird die Verlängerung der Dreieckseite  $BC$  durch die in  $A$  gezogene Tangente des Umkreises in  $A_1$  geschnitten, so ist  $A_1B : A_1C = AB^2 : AC^2$ . — 650. Zieht man in den Ecken eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  an den Umkreis Tangenten, welche die Gegenseiten in  $A_1, B_1, C_1$  schneiden, so liegen  $A_1, B_1, C_1$  auf einer Geraden (302, A. 649). — 651. Die Schenkel dreier rechter Winkel mit gemeinsamem Scheitel bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. — 652. Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Seitenlinien eines Sehnenvierecks und der Kreislinie bilden eine involutorische Punktreihe. — 653. Sind im Sehnenviereck die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten und der Schnittpunkt der Diagonalen bestimmt, so ist jeder dieser drei Punkte der Pol zur Verbindungslinie der beiden anderen. — 654. Ist  $AB$  ein Durchmesser,  $C$  und  $D$  zwei beliebige Punkte der Kreislinie, und Bogen  $AE = AD$  gemacht, so theilen die Geraden  $CD$  und  $CE$  den Durchmesser harmonisch.

655) Eine Kreislinie zu zeichnen, die aus den Seiten eines geg. Dreiecks Sehnen von gleicher, gegebener Länge ausschneidet. — 656) In ein geg. Dreieck ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Richtung einer Seite gegeben ist (Meth. d). — 657) In einen geg. Kreis ein Dreieck von geg. Umfang zu zeichnen, worin  $a - b = b - c$  ist (Meth. d). — 658) In einen geg. Kreis ( $r$ ) ist ein Dreieck von geg. Fläche ( $f^2$ ) beschrieben, dessen Seiten eine stetige geom. Proportion bilden. Wie gross sind seine Seiten? (A. 521.) — 659) Durch einen ausserhalb einer Kreisfläche geg. Punkt eine Secante bis zu einer geg. Geraden so zu ziehen, dass die beiden äusseren Abschnitte der Secante einander gleich werden. — 660) Durch einen ausserhalb einer Kreisfläche geg. Punkt eine Secante so zu ziehen, dass ihr innerer Abschnitt durch eine geg. Sehne halbiert wird. — 661) Eine Strecke von geg. Richtung und Länge so zu verschieben, dass ihre Endpunkte auf zwei geg. Kreislinien liegen (125). — 662) Durch einen geg. Punkt innerhalb eines geg. Segmentes eine Strecke zu ziehen, die in diesem Punkte halbiert wird. — 663) Eine Sehne so zu ziehen, dass sie durch zwei geg. Radien des Kreises in drei gleiche Theile getheilt wird. — 664) Auf einer geg. Strecke  $AB$  zwei Punkte  $A_1, B_1$  so zu bestimmen, dass  $AA_1 = BB_1$  ist, und  $A, B_1$  und  $B, A_1$  harmonische Punktpaare sind. — 665) In einen geg. Sector ein Quadrat so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf dem einen, die dritte auf dem andern Radius und die vierte



auf dem Bogen liegt. — 666) In ein geg. Segment ein Quadrat so zu zeichnen, dass zwei Ecken auf der Sehne, zwei auf dem Bogen liegen. — 667) Drei Strecken  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  sind gegeben. Man soll einen Punkt  $X$  so bestimmen, dass  $\overline{XAB} = \overline{XA_1B_1} = \overline{XA_2B_2}$  ist. — 668) In einem Viereck  $\overline{ABCD}$  einen Punkt  $X$  so zu bestimmen, dass  $\overline{XAB} = \overline{XCD}$  und  $\overline{XBC} = \overline{XDA}$  ist. — 669) In einem geg. Dreieck  $\overline{ABC}$  einen Punkt  $X$  so zu bestimmen, dass die Dreiecksflächen  $\overline{XAB}$ ,  $\overline{XBC}$ ,  $\overline{XCA}$  in geg. Verhältnissen stehen. — 670) Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei geg. Kreislinien unter gleichen Gesichtswinkeln erscheinen. — 671) Auf den drei Seiten eines Dreiecks sind drei Punkte  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  gegeben. Man soll einen Punkt  $X$  so bestimmen, dass die Strecken  $XA_1$ ,  $XB_1$ ,  $XC_1$  das Dreieck in drei gleiche Theile theilen. — 672) Auf einer Geraden sind vier Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  gegeben. Man soll ausserhalb der Geraden einen Punkt  $X$  so bestimmen, dass Winkel  $AXB = BXC = CXD$  ist. — 673) Auf einem geg. Bogen  $AB$  einen Punkt  $X$  so zu bestimmen, dass  $XA \cdot XB$  gleich einer geg. Fläche  $a^2$  ist (A. 639). — 674) Durch einen geg. Punkt in der Ebene eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  eine Gerade zu ziehen, welche  $AB$  in  $X$  und  $AC$  in  $Y$  so trifft, dass  $BX + CY = XY$ . — 675) Eine geg. Strecke zwischen zwei Seiten eines Dreiecks so einzutragen, dass sie gleich der Summe der unteren Abschnitte dieser Seiten ist. — Gegeben ein Kreis mit zwei Tangenten. Eine dritte Tangente, welche den Kreis in  $X$  berührt, und die andern Tangenten in  $Y$  und  $Z$  schneidet, soll so gezogen werden, dass 676)  $XY + XZ = a$ , 677)  $XY : XZ = m : n$ , 678)  $XY \cdot XZ = a^2$  ist.

Methode e). — 679) Ein Quadrat von einer geg. Ecke aus so zu zeichnen, dass die gegenüberliegenden Seiten durch zwei geg. Punkte gehen. — 680) Von einem geg. Punkte aus drei geg. Strecken so zu ziehen, dass ihre Endpunkte drei Ecken eines Quadrates werden. — 681) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ecken auf den Seitenlinien eines geg. Parallelogramms liegen. — 682) In ein geg. Parallelogramm einen Rhombus zu zeichnen, von welchem das Verhältniss der Diagonalen gegeben ist. — 683) In ein geg. Parallelogramm ein Rechteck zu zeichnen, von welchem der Winkel der Diagonalen gegeben ist. — 684) In ein geg. Dreieck ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen eine Ecke in einem auf einer Seite geg. Punkte liegt.

685. Der Umkreis eines Dreiecks geht durch die Mitten



der sechs Strecken, welche die Mittelpunkte je zweier Berührungskreise verbinden. — 686. Wenn man aus dem Punkte, in welchem der Umkreis eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  von der Geraden  $m_1$  geschnitten wird, eine Kreislinie beschreibt, welche durch den Mittelpunkt des Inkreises geht, so geht dieselbe auch durch  $B$ ,  $C$ , und den Mittelpunkt des die Seite  $BC$  berührenden Ankreises. — In jedem Dreieck ist 687.  $f^2 = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3$ , 688.  $f^4 = \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ , 689.  $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$ . — 690. Auf jeder Halbierungslinie eines Winkels oder Aussenwinkels im Dreieck sind die Ecke, der Schnittpunkt mit der Gegenseite, und die Mittelpunkte der beiden Berührungskreise harmonische Punkte. — In jedem Dreieck ist 691.  $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \varrho + 4r$  (A. 685), 692.  $ab = \varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2$ , 693.  $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$ ,  $\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$ , etc. — 694. Die Summe der drei oberen Abschnitte der Höhen eines Dreiecks ist gleich  $2(r + \varrho)$  (A. 691, 695). — 695. Das Quadrat einer Dreiecksseite + dem Quadrat des oberen Abschnittes der zugehörigen Höhe ist gleich  $4r^2$ . — 696. Der Radius des Kreises, welcher durch die Mittelpunkte ( $M_1, M_2, M_3$ ) der drei Ankreise eines Dreiecks geht, ist gleich  $2r$ , und sein Mittelpunkt  $V$  liegt auf der durch die Mittelpunkte ( $M$  und  $O$ ) des In- und Umkreises gehenden Geraden so, dass  $MO = OV$  ist. — 697. Der Inhalt des durch die Mittelpunkte der Ankreise eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  bestimmten Dreiecks ist gleich  $2pr$ . — 698. Schneidet die aus einer Ecke  $A$  des Dreiecks durch den Mittelpunkt  $M$  des Inkreises gezogene Gerade den Umkreis in  $A_1$ , so ist  $MA \cdot MA_1 = 2r\varrho$  (367, A. 645). — 699. Ebenso, wie in 698, ist  $M_1A \cdot M_1A_1 = 2r\varrho_1$ , etc. — 700. Ist der Abstand zwischen den Mittelpunkten des In- und Umkreises eines Dreiecks durch  $d$  bezeichnet, so ist  $d^2 = r(r - 2\varrho)$  (364, 367). — 701. Ebenso, wie in 700, ist, wenn  $d_1$  den Abstand zwischen den Mittelpunkten der mit  $r$  und  $\varrho_1$  beschriebenen Kreise bedeutet,  $d_1^2 = r(r + 2\varrho_1)$  etc.

Ein Dreieck zu zeichnen aus 702)  $\alpha, a + b, a + c$ , 703)  $\alpha, \varrho, p_3$ , 704)  $\alpha, \beta, p_1$ , 705)  $a, f^2, b^2 + c^2$ , 706)  $a, f^2, b^2 - c^2$ , 707)  $a, \varrho, b + c$ , 708)  $a, \varrho, b - c$ , 709)  $a, f^2, b + c$ , 710)  $h_1, \varrho, p$ , 711)  $\alpha, \varrho, b + c$ , 712)  $\alpha, \varrho, p$ , 713)  $a, h_1, \varrho$ , 714)  $\alpha, \varrho, a - c$ , 715)  $\varrho, b - c, \beta - \gamma$ , 716)  $r, \varrho, b - c$ , 717)  $r, \varrho, \beta - \gamma$ , 718)  $a, m_1, b + c$  (253, 255), 719)  $h_1, r, \varrho$  (A. 690), 720)  $a, \varrho_2, \varrho_3$ , 721)  $a + b, \varrho_1, \varrho_2$ , 722)  $a, r, \varrho_2$ , 723)  $\varrho_2, \varrho_3, \beta - \gamma$  (Bestimme den Winkel zwischen  $M_2M_3$  und  $BC$ ), 724)



$h_1, h_2, e_2$ , 725)  $h_1, h_2, e_3$ , 726)  $e, e_1, b$ , 727)  $e, e_1, h_2$ , 728)  $e, e_1, m_1$ , 729)  $e, e_1, b + c$  (A. 687), 730)  $e, e_2, h_1$ , 731)  $e, e_1, r$  (A. 685), 732)  $e_1, e_2, e_3$  (A. 693), 733)  $e, e_1, e_2$  (A. 693).

Ein Sehnenviereck zu zeichnen aus 734) zwei anstossenden Seiten, dem Winkel der Diagonalen und  $r$ , 735)  $f^2, \alpha, a : b, b : a_1$ , 736)  $a, b, a_1, b_1$ . — 737) Ein Tangentenviereck zu zeichnen aus  $f^2$  und den Winkeln.

---



# Register.

|                                                                                      | Nr. |                                                                                  | Nr. |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Aehnlichkeitsaxe . . . .                                                             | 126 | Centrum ( $\kappa\acute{\epsilon}\nu\tau\rho\omicron\nu$ ) . . . .               | 35  |
| „ polare . . . .                                                                     | 139 | Complementwinkel (complere) . .                                                  | 49  |
| „ punkt . . . . 108.                                                                 | 117 | Convergente Richtungen (con-                                                     |     |
| „ strahl . . . .                                                                     | 117 | vergere) . . . .                                                                 | 29  |
| Ankreis . . . .                                                                      | 98  | Diagonale ( $\delta\iota\acute{\alpha}$ , $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ ) . . . . | 78  |
| Asymptote ( $\alpha\text{-}\sigma\upsilon\mu\pi\acute{\iota}\pi\tau\omega$ ) . . . . | 174 | „ dritte des vollständigen Vierecks .                                            | 132 |
| Asymptotenwinkel . . . .                                                             | 175 | Dicke . . . .                                                                    | 5   |
| Augenpunkt . . . .                                                                   | 140 | Differenz von Strecken . . . .                                                   | 17  |
| Ausdehnung . . . .                                                                   | 5   | „ „ Winkeln . . . .                                                              | 38  |
| Aussenwinkel . . . .                                                                 | 59  | Directrix der Ellipse (dirigere) .                                               | 170 |
| Axen der Ellipse . . . .                                                             | 168 | „ „ Hyperbel . . . .                                                             | 175 |
| „ „ Hyperbel . . . .                                                                 | 173 | „ „ Parabel . . . .                                                              | 179 |
| „ „ Parabel . . . .                                                                  | 177 | Divergente Richtungen (di-ver-                                                   |     |
| Basis des gleichsch. Dreiecks . . . .                                                | 69  | gere) . . . .                                                                    | 29  |
| Berührung $n^{\text{ter}}$ Ordnung . . . .                                           | 180 | Doppellinie . . . .                                                              | 121 |
| „ zweier Kreise . . . .                                                              | 104 | „ punkt . . . .                                                                  | 121 |
| Berührungskreis des Dreiecks . . . .                                                 | 98  | „ „ der Involution . . . .                                                       | 133 |
| „ punkt . . . .                                                                      | 92  | „ verhältniss . . . .                                                            | 127 |
| „ secante . . . .                                                                    | 139 | Drehung . . . .                                                                  | 29  |
| Bestimmungsdreieck . . . .                                                           | 101 | „ entgegengesetzte . . . .                                                       | 42  |
| Bewegung . . . .                                                                     | 3   | Drehungspunkt . . . .                                                            | 29  |
| „ begrenzte . . . .                                                                  | 10  | Dreieck . . . .                                                                  | 59  |
| „ einfache . . . .                                                                   | 8   | „ gleichschenkliges . . . .                                                      | 69  |
| „ endliche . . . .                                                                   | 11  | „ gleichseitiges . . . .                                                         | 69  |
| „ unbegrenzte . . . .                                                                | 10  | „ rechtwinkliges . . . .                                                         | 61  |
| „ unendliche . . . .                                                                 | 11  | „ schiefwinkliges . . . .                                                        | 61  |
| „ zusammengesetzte . . . .                                                           | 8   | „ spitzwinkliges . . . .                                                         | 61  |
| Bogen, entgegengesetzte . . . .                                                      | 35  | „ stumpfwinkliges . . . .                                                        | 61  |
| Breite . . . .                                                                       | 5   | „ ungleichseitiges . . . .                                                       | 69  |
| Brennpunkt der Ellipse . . . .                                                       | 168 | Dreieckschnittverhältniss . . . .                                                | 129 |
| „ „ Hyperbel . . . .                                                                 | 173 | Dreieckszahlen, pythagoräische . .                                               | 149 |
| „ „ Parabel . . . .                                                                  | 177 | Durchmesser des Kreises . . . .                                                  | 90  |
| Centrallinie . . . .                                                                 | 104 | „ der Ellipse . . . .                                                            | 168 |
| Centralpunkt . . . .                                                                 | 116 | „ „ Hyperbel . . . .                                                             | 173 |
| Centriwinkel des Kreises . . . .                                                     | 35  | Ebene . . . .                                                                    | 10  |
| „ „ Polygons . . . .                                                                 | 101 |                                                                                  |     |



|                                                                                               | Nr. |                                                                                                   | Nr. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Ecke des Körpers . . . . .                                                                    | 2   | Kreis . . . . .                                                                                   | 88  |
| „ dritte des vollst. Vierecks                                                                 | 130 | „ abschnitt . . . . .                                                                             | 90  |
| Eckpunkt der Figur . . . . .                                                                  | 2   | „ ausschnitt . . . . .                                                                            | 88  |
| Ellipse ( $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\omega$ ) . . . . .                          | 167 | „ bogen . . . . .                                                                                 | 35  |
| Endpunkt der Strecke . . . . .                                                                | 2   | „ fläche . . . . .                                                                                | 88  |
| Entfernung . . . . .                                                                          | 74  | „ linie . . . . .                                                                                 | 35  |
| Errichten der Senkrechten . . . . .                                                           | 33  | „ einbeschriebener . . . . .                                                                      | 98  |
| Excentricität (ex-centrum) der                                                                |     | „ umbeschriebener . . . . .                                                                       | 98  |
| Ellipse . . . . .                                                                             | 170 | Kreise, concentr. (con-centrum)                                                                   | 104 |
| „ der Hyperbel . . . . .                                                                      | 175 | Krümmung . . . . .                                                                                | 180 |
| Fällen der Senkrechten . . . . .                                                              | 33  | Krümmungskreis . . . . .                                                                          | 180 |
| Figur (figura) . . . . .                                                                      | 2   | „ radius . . . . .                                                                                | 180 |
| „ ebene . . . . .                                                                             | 8   | Lage des Punktes . . . . .                                                                        | 15  |
| „ einbeschriebene . . . . .                                                                   | 98  | „ „ Winkels . . . . .                                                                             | 32  |
| „ krumme . . . . .                                                                            | 8   | „ perspectivische (perspicere)                                                                    | 107 |
| „ umbeschriebene . . . . .                                                                    | 98  | „ verkehrt-perspectivische . . . . .                                                              | 114 |
| Fläche . . . . .                                                                              | 2   | Länge . . . . .                                                                                   | 5   |
| Fusspunkt der Strecke . . . . .                                                               | 74  | Leitkreis der Ellipse . . . . .                                                                   | 167 |
| Gebiet . . . . .                                                                              | 12  | „ „ „ Hyperbel . . . . .                                                                          | 172 |
| „ einfaches . . . . .                                                                         | 12  | „ linie der Parabel . . . . .                                                                     | 177 |
| „ freies . . . . .                                                                            | 12  | „ punkt der Ellipse . . . . .                                                                     | 167 |
| Gebilde, ähnliche . . . . .                                                                   | 9   | „ „ „ Hyperbel . . . . .                                                                          | 172 |
| „ congruente (congruere)                                                                      | 9   | „ „ „ Parabel . . . . .                                                                           | 177 |
| „ gleiche . . . . .                                                                           | 6   | „ strahl der Ellipse . . . . .                                                                    | 168 |
| „ projectivische . . . . .                                                                    | 107 | „ „ „ Hyperbel . . . . .                                                                          | 173 |
| Gegenwinkel . . . . .                                                                         | 53  | Linie . . . . .                                                                                   | 2   |
| Gerade . . . . .                                                                              | 10  | „ Pascal'sche . . . . .                                                                           | 136 |
| „ antiparallele ( $\alpha\nu\tau\iota$ -)                                                     | 27  | Mitte zweier Punkte . . . . .                                                                     | 23  |
| „ parallele ( $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\text{-}\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omega\nu$ ) | 27  | Mittel, harmonisches . . . . .                                                                    | 112 |
| „ schneidende . . . . .                                                                       | 29  | Mittellinie des Dreiecks . . . . .                                                                | 70  |
| Gesichtswinkel . . . . .                                                                      | 63  | „ „ „ Parallelogramms . . . . .                                                                   | 87  |
| Gestalt . . . . .                                                                             | 9   | „ „ „ Trapezes . . . . .                                                                          | 110 |
| Grösse . . . . .                                                                              | 6   | „ punkt des Kreises . . . . .                                                                     | 35  |
| „ scheinbare . . . . .                                                                        | 63  | „ „ der Figur . . . . .                                                                           | 80  |
| Grundlinie des Parallelogramms                                                                | 81  | „ „ „ Involution . . . . .                                                                        | 133 |
| „ „ Dreiecks . . . . .                                                                        | 82  | „ „ „ Ellipse . . . . .                                                                           | 168 |
| Halbirungslinie des Winkels . . . . .                                                         | 44  | „ „ „ Hyperbel . . . . .                                                                          | 173 |
| „ punkt der Strecke . . . . .                                                                 | 23  | „ richtung . . . . .                                                                              | 44  |
| Halbkreis . . . . .                                                                           | 35  | „ senkrechte des Dreiecks . . . . .                                                               | 70  |
| Höhe des Dreiecks . . . . .                                                                   | 70  | Nebendiagonale } im vollständ. . . . .                                                            | 132 |
| „ „ Parallelogramms . . . . .                                                                 | 82  | Nebenecke        } Viereck                                                                        |     |
| Hyperbel ( $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$ ) . . . . .       | 172 | Nebenwinkel . . . . .                                                                             | 48  |
| Hypotenuse ( $\upsilon\pi\omicron\tau\epsilon\acute{\iota}\nu\omega$ ) . . . . .              | 71  | n-Eck . . . . .                                                                                   | 64  |
| Inkreis . . . . .                                                                             | 98  | Normale . . . . .                                                                                 | 33  |
| Kante . . . . .                                                                               | 2   | Ort, geometrischer . . . . .                                                                      | 66  |
| Kathete ( $\kappa\alpha\theta\acute{\eta}\mu\iota$ ) . . . . .                                | 71  | Orthogonalkreis ( $\acute{o}\rho\theta\acute{\eta}\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ ) . . . . . | 116 |
| Körper . . . . .                                                                              | 2   | Parabel ( $\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$ ) . . . . .                | 177 |



|                                                                                                             | Nr.      |                                                                 | Nr. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------------------------------------------------------------|-----|
| Parallelogramm ( $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\omega$ ) . . .                                            | 78       | Scheitel des Winkels . . .                                      | 32  |
| Parameter der Ellipse ( $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$ ,<br>$\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\nu$ ) . . . | 170      | „ „ Strahlenbüschels . . .                                      | 130 |
| „ „ Hyperbel . . .                                                                                          | 175      | „ der Parabel . . .                                             | 177 |
| „ „ Parabel . . .                                                                                           | 179      | „ winkel . . .                                                  | 50  |
| Peripherie ( $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\acute{\epsilon}\rho\omega$ ) . . .                                | 88       | Schenkel des Winkels . . .                                      | 32  |
| „ winkel . . .                                                                                              | 91       | „ „ gleichsch. Dreiecks . . .                                   | 69  |
| Pol ( $\pi\acute{o}\lambda\omicron\varsigma$ , $\pi\omicron\lambda\acute{\epsilon}\omega$ ) . . .           | 137      | Schwerpunkt von Punkten . . .                                   | 25  |
| „ harmonischer . . .                                                                                        | 138      | „ des Dreiecks . . .                                            | 119 |
| Polare . . .                                                                                                | 137      | Secante (secare) . . .                                          | 90  |
| Polygon ( $\pi\omicron\lambda\acute{\upsilon}\varsigma$ , $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ ) . . .      | 64       | Sechseck, Brianchon'sches . . .                                 | 135 |
| „ regelmässiges . . .                                                                                       | 101      | Sechseck, Pascal'sches . . .                                    | 136 |
| Potenz eines Punktes . . .                                                                                  | 114      | Sector (secare) . . .                                           | 88  |
| „ linie . . .                                                                                               | 116      | Segment (secare) . . .                                          | 90  |
| „ punkt . . .                                                                                               | 116      | Sehne . . .                                                     | 90  |
| Product von Strecken . . .                                                                                  | 114. 143 | Sehnenfigur . . .                                               | 98  |
| Projection (projicere) . . .                                                                                | 140      | Seite der Bewegung . . .                                        | 41  |
| Projectionspunkt . . .                                                                                      | 140      | „ „ Ellipse . . .                                               | 169 |
| „ strahlen . . .                                                                                            | 140      | „ „ Hyperbel . . .                                              | 174 |
| Proportion, harmonische . . .                                                                               | 112      | „ „ Parabel . . .                                               | 178 |
| „ wiederkehrende . . .                                                                                      | 114      | Seiten des Dreiecks . . .                                       | 59  |
| Proportionale, mittlere . . .                                                                               | 115      | „ der Figur . . .                                               | 2   |
| „ vierte . . .                                                                                              | 111      | „ des Körpers . . .                                             | 2   |
| Punkt . . .                                                                                                 | 2. 3     | „ des Vierecks . . .                                            | 78  |
| „ Brianchon'scher . . .                                                                                     | 135      | „ linie des Dreiecks . . .                                      | 127 |
| „ imaginärer . . .                                                                                          | 153      | Spitze des gleichsch. Dreiecks . . .                            | 69  |
| „ potenzhaltender . . .                                                                                     | 125      | Strahl . . .                                                    | 130 |
| „ unendlich ferner . . .                                                                                    | 58       | Strahlenbündel . . .                                            | 130 |
| Punkte, conjugirte . . .                                                                                    | 112      | Strahlenbüschel . . .                                           | 130 |
| „ harmonische . . .                                                                                         | 112      | „ collineare . . .                                              | 132 |
| Punktreihe, collineare (collineare) . . .                                                                   | 131      | „ harmonische . . .                                             | 130 |
| „ involutor. (involvere) . . .                                                                              | 133      | „ involutorische . . .                                          | 134 |
| Quadrant (quadrans) . . .                                                                                   | 35       | Strecke . . .                                                   | 2   |
| Quadrat (quadratum) . . .                                                                                   | 79       | „ gerade . . .                                                  | 8   |
| Quadrupelverhältniss . . .                                                                                  | 130      | „ krumme . . .                                                  | 8   |
| Quotient von Strecken . . .                                                                                 | 20       | „ negative . . .                                                | 22  |
| „ „ Winkeln . . .                                                                                           | 40       | „ positive . . .                                                | 22  |
| Radius des Kreises (radius) . . .                                                                           | 35       | Stücke des Dreiecks . . .                                       | 65  |
| „ „ regelm. Polygons . . .                                                                                  | 101      | „ homologe . . .                                                | 67  |
| „ Vector d. Ellipse (vehere) . . .                                                                          | 168      | Summe von Strecken . . .                                        | 17  |
| „ „ „ Hyperbel . . .                                                                                        | 173      | „ „ Winkeln . . .                                               | 37  |
| Raum . . .                                                                                                  | 1. 10    | Supplementwinkel (supplere) . . .                               | 49  |
| Rechteck . . .                                                                                              | 79       | Tangente des Kreises (tangere) . . .                            | 92  |
| Rhombus ( $\rho\acute{o}\mu\beta\omicron\varsigma$ ) . . .                                                  | 79       | „ der Ellipse . . .                                             | 169 |
| Richtung . . .                                                                                              | 8        | „ „ Hyperbel . . .                                              | 174 |
| „ der Geraden . . .                                                                                         | 16       | „ „ Parabel . . .                                               | 178 |
| „ convergente . . .                                                                                         | 29       | Tangentenfigur . . .                                            | 98  |
| „ divergente . . .                                                                                          | 29       | Theilung, harmonische . . .                                     | 112 |
| „ entgegengesetzte . . .                                                                                    | 21       | „ nach d. goldnen Schnitt . . .                                 | 159 |
| „ senkrechte . . .                                                                                          | 33       | „ stetige . . .                                                 | 159 |
|                                                                                                             |          | Träger der Punktreihe . . .                                     | 131 |
|                                                                                                             |          | Trapez ( $\tau\rho\acute{\alpha}\pi\epsilon\zeta\alpha$ ) . . . | 78  |



|                                 | Nr. |                                 | Nr. |
|---------------------------------|-----|---------------------------------|-----|
| Trapez, gleichschenkliges . . . | 110 | Winkel, correspondirender (con- |     |
| Tripelverhältniss . . .         | 129 | respondere) . . .               | 53  |
| Umdrehung . . .                 | 33  | „ geschlossener . . .           | 33  |
| Umkehrungssatz . . .            | 49  | „ gestreckter . . .             | 33  |
| Umkreis . . .                   | 98  | „ negativer . . .               | 43  |
| Verbindungsline . . .           | 16  | „ positiver . . .               | 43  |
| Verschiebung . . .              | 27  | „ rechter . . .                 | 33  |
| Vieleck . . .                   | 64  | „ schiefer . . .                | 33  |
| „ regelmässiges . . .           | 101 | „ spitzer . . .                 | 33  |
| Viereck . . .                   | 78  | „ stumpfer . . .                | 33  |
| Viereckschnittverhältniss . . . | 130 | „ verschränkter . . .           | 53  |
| „ . . .                         |     | „ des Dreiecks . . .            | 59  |
| Wechselwinkel . . .             | 53  | „ an der Basis des gleich-      |     |
| Weg . . .                       | 3   | schenkl. Dreiecks . . .         | 69  |
| Winkel . . .                    | 32  | „ an der Spitze des gleich-     |     |
| „ anstossender . . .            | 37  | schenkl. Dreiecks . . .         | 69  |
| „ concaver (concavus) . . .     | 33  | „ zweier Kreislinien . . .      | 116 |
| „ convexer (convexus, ve-       |     | „ halbirende des Dreiecks . . . | 70  |
| here) . . .                     | 33  | Zahl, Ludolph'sche . . .        | 162 |

## Berichtigungen.

|           |         |                                     |                                |
|-----------|---------|-------------------------------------|--------------------------------|
| Seite 107 | Zeile 2 | von u. lies $C_1$ oder $C_2$        | statt $1$ oder $C_2C$ .        |
| „ 109     | „ 3     | „ 0. „ $AC_2$                       | „ $AB_2$ .                     |
| „ 137     | „ 12    | „ u. „ $OTB$                        | „ $OT_0$ .                     |
| „ 139     | „ 1     | „ u. „ $MB_1$                       | „ $MO_1$ .                     |
| „ 156     | „ 2     | „ 0. „ $\left(\frac{r}{2}\right)^2$ | „ $\left(\frac{r}{2}\right)$ . |











## Berichtigungen zu Teil II.

S. 41. In den Sätzen 66, 67, 68 lies 65 statt 63.

S. 201. In Aufgabe 346 lies  $\alpha$  statt  $a$ .

Das. Aufgabe 359 ist fälschlich mit 358 bezeichnet.

S. 210, Z. 18 v. o. schalte nach „einbeschriebenen“ ein: „regelmässigen“.

S. 214, Z. 12 v. o. schalte nach „Sehne“ ein: *CD*.

---



In meinem Verlage sind nachstehende, meist für höhere Lehranstalten geeignete Lehrbücher erschienen:

**Repetitorium**  
der  
**lateinischen Grammatik und Stilistik**  
nebst einem Anhang:  
Einige Regeln für die Abfassung lateinischer Aufsätze  
von  
**Dr. H. Menge,**  
Oberlehrer am Gymnasium zu Sangerhausen.  
**Dritte Auflage.**  
Preis 1. Theil 1 M. 50 Pf., 2. Theil 3 M. 50 Pf.  
Preis für Theil 1 u. 2 4 Mk. 50 Pf.

**Kurzgefasste**  
**lateinische Synonymik**  
für die obersten Gymnasialklassen  
bearbeitet von  
**Dr. H. Menge.**  
Zweite bedeutend vermehrte Auflage.  
13 Bogen gr. 8. Preis 2 Mark 25 Pf.  
Die Lehrbücher von Menge erfreuen sich eines guten Rufs und ist namentlich dessen Repetitorium auf vielen Gymnasien Deutschlands und des Auslandes zur Anschaffung empfohlen und im Gebrauch.

**Geschichte**  
der  
**deutschen Literatur**  
mit  
besonderer Berücksichtigung der  
modernen Kulturbestrebungen,  
im Umriss bearbeitet  
von  
**Dr. H. Menge.**  
28 Bogen gr. 8. Preis 5 Mark.  
**Handbuch zur Einführung**  
in  
**die deutsche Literatur.**  
Für die oberen Classen  
mittlerer und höherer Volksschulen  
sowie gehobener Bildungsanstalten überhaupt  
bearbeitet von  
**Karl Grossmann,**  
Schuldirector in Annaberg.  
I. Theil: Die Poesie. 2. Aufl.  
II. Theil: Die Prosa.  
Preis eines jeden 20 Bogen 80 starken  
Theiles: 1 Mk. 25 Pf.

**Wolfenbüttel.**

**Grundriss**  
der  
**Weltgeschichte**  
für die oberen Classen  
höherer Lehranstalten  
von  
**Dr. A. Gehrke,**  
Oberlehrer am Gymnasium in Rudolstadt.  
1r Theil: Alterthum. Preis 1 Mk. 80 Pf.  
2r „ Mittelalter. „ 1 „ 25 „  
3r „ Neuzeit. „ 1 „ 80 „  
Theil 1—3 in einen Band brosch. 4 Mk. 50 Pf.

**Lehrbuch**  
der elementaren Mathematik  
von  
**Victor Schlegel,**  
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.  
1. Theil: Arithmetik und Combinatorik.  
Preis 2 Mk. 40 Pf.

**Kurzgefasste**  
**französ. Synonymik**  
für Schüler bearbeitet  
von  
**Dr. Friedrich Koldewey,**  
Oberlehrer am Gymnasium in Wolfenbüttel.  
5 Bgn. 80 steif brosch. Preis 1 Mark.

**Leitfaden**  
zur  
**Kunstgeschichte cultivirter Völker**  
alter und neuer Zeit.  
Zusammengestellt von  
**A. Thamm,**  
Rector der priv. höh. Töchterschule in Striegau.  
Zweite Auflage.  
9 Bgn. 80. Preis 1 Mk. 50 Pf.

**Grundzüge**  
der **Wirthschaftslehre.**  
Ein Leitfaden  
für den Unterricht an landwirth-  
schaftlichen u. andern gewerblichen  
Lehranstalten  
bearbeitet von  
**Dr. Victor Funk,**  
Director d. landw. Schule Marienberg zu Helmstedt.  
5 Bgn. 8. brosch. Preis 1 Mk. 20 Pf.

**Julius Zwisser.**

Jede Buchhandlung ist bereit, oben angezeigte Werke zur Ansicht mitzutheilen.











Schlegel, Victor, 1843-1905

Lehrbuch der elementaren Mathematik

Bd.: 2

Wolfenbüttel 1879

Math.u. 176 m-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11390659-1